UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

TESIS DOCTORAL

Algunas cuestiones sobre la aritmética de las distribuciones de probabilidades

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Antonio García Rendon

Madrid, 2015

Antonino García Rendon

ALGUNAS CUESTIONES SOBRE LA ARITMETICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-36108-1980

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E

Facultad de Ciencias Matemáticas

Sección de Estadística e I. O.

ALGUNAS CUESTIONES SOBRE LA ARITMETICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Memoria, que, para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas, y dirigida por el profesor Dr. Ildefonso Yáñez de Diego, presenta:

ANTONINO GARCIA RENDON

Madrid, septiembre, 1979.

A mi madre

I N D I C E

INTRODUCCION GENERAL

"A vosotros no os importe pensar lo que habéis leído ochenta veces y oído quinientas, porque no es lo mismo pensar que haber leído."

(Juan de Mairena, XI ; A. Machado)

La expresión "aritmética de distribuciones" ,que da título a esta memoria,no es otra cosa que el problema de escribir una función característica dada como producto de otras.El que se usen las características para resolver un problema que es realmente de convolución,no es más que una facilidad de cálculo,pues razonar directamente con el espacio muestral para saber cuando una variable aleatoria se expresa como suma de dos independientes puede ser prácticamente imposible,salvo en casos triviales.

El problema en sí tiene antecedentes claros en los llamados problemas de caracterización en Estadística Matemática. Ahora bien,puede considerarse como algo puramente analítico, a caballo entre la teoría de la Probabilidad y algunos temas de la teoría de funciones y del análisis de Fourier.Hemos adoptado en todo el trabajo este último punto de vista.

Se ha intentado que,salvo en mínimos detalles,la memoria sea autosuficiente.Por esta razón,se incluye en primer lugar un listado de cuestiones básicas sobre funciones de distribución,características,generatrices,etc .A continuación,se exponen,con cierto detalle pero naturalmente sin ningún tipo de demostración,algunas ideas sobre el problema de la factorización de una función entera.Termina la primera parte con la exposición clásica de la teoría de las características analíticas,y algunos resultados y ejemplos del autor.

La segunda parte se dedica a la teoría general de la factorización y a otras cuestiones particulares. Se exponen suficientes ejemplos para que las ideas de la teoría aparezcan claras. Los resultados previos que permiten probar los teoremas generales de Khinchine, Cramér, etc han sido cambiados unos, retocados otros. No así la idea central de estos resultados importantes, razón por la que sólo aparecen enunciados. Dedicamos algunas líneas a probar cosas elementales y conocidas sobre las infinitamente divisibles, para que se vea la potencia de los métodos analíticos. Termina esta segunda parte con algunas observaciones personales sobre la factorización de dos distribuciones concretas: la gamma y la de Poisson. Para esta última, la herramienta usada es la generatriz, por las razones que allí se dan.

Algunos apéndices, unos con algún cálculo, otro con tablas y otro con un teorema no muy conocido retocado por el autor, dan fin al trabajo.

Una observación final: ni la factorización es una teoría acabada, ni posee una metodología única para tratar sus problemas. No debe sorprender, pues, la aparente falta de unidad del trabajo.

Una 'R' seguida de un número es una llamada a la referencia bibliográfica con ese número. Los teoremas, lemas, definiciones, ejemplos, etc. aparecen listados consecutivamente por centenas. El orden de la centena corresponde al número de capítulo. Dentro de cada capítulo, la exposición va dividida en párrafos.

= = = =

Mi agradecimiento a todas las personas que han colaborado, de muchas formas, a la elaboración de este trabajo. Y, muy en especial, agradezco el magisterio de los profesores Yáñez de Diego y Vélez Ibarrola.

P R I M E R A   P A R T E

CAPITULO I : ALGUNOS PRERREQUISITOS BASICOS

Tal y como se ha expuesto en la Introducción General, recopilaremos aquí una serie de definiciones y resultados más o menos conocidos de la teoría general de las funciones de distribución y de las funciones características. Se incluyen algunas cuestiones especiales al final del capítulo.

La naturaleza, en resultados y en técnicas de demostración, de las cuestiones tratadas en esta memoria, hace que realmente podría leerse toda ella sin saber casi nada de probabilidades. Incluso muy poca teoría de la medida, directa o indirectamente utilizada, aparece. Conviene, no obstante, no perder de vista el marco natural que ha originado estos problemas, y tras la advertencia, se supondrán conocidos algunos hechos básicos de la teoría de la medida y las cuestiones más elementales de la teoría de la probabilidad. Los capítulos 4 á 9, ambos inclusive, y 11 de R9 son suficientes a este fin.

1.1 Funciones de distribución

101 Definición: Una función $F:R \longrightarrow R$, que verifique

a) $F(x)$ es no negativa

b) F es monótona no decreciente

c) F es continua por la derecha

d) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

se llama una función de distribución de probabilidad.

A veces trabajaremos con distribuciones de variables aleatorias acotadas. Conviene, pues, introducir las siguientes

102 Definiciones: Decimos que una función de distribución de probabilidad está acotada por la izquierda y que el punto $x=a$ es su punto extremo de la izquierda si se verifica:

Para cualquier número real w estrictamente positivo,es

$$F(a-w)=0$$

y

$$F(a+w)>0.$$

Análogamente se definiría la extremidad,x=b,de la derecha.Entonces,llamaremos distribuciones finitas o acotadas a las que simultáneamente poseen extremidades izquierda y derecha.Unilaterales serán aquellas que sólo posean una de las dos.En el caso de distribuciones finitas,llamaremos intervalo soporte de la distribución al intervalo $[a,b]$

Los resultados que siguen nos recuerdan la clasificación de las distribuciones.

103 Teorema: Toda función de distribución de probabilidad $F(x)$ puede descomponerse así:

$$F(x)= aF_d(x)+(1-a)F_c(x)$$

siendo $0\leq a\leq 1$, $F_d(x)$ una función escalonada y $F_c(x)$,una función continua monótona no decreciente.

La función $F_c(x)$ no es necesariamente derivable en todos los puntos.Lo es,como cualquier función monótona,en casi todas partes (veáse,por ejemplo,R11).El resultado anterior puede refinarse con herramientas más sutiles obteniéndose:

104 Teorema: Toda función de distribución de probabilidad $F(x)$ puede descomponerse así:

$$F(x)= aF_d(x)+bF_{ac}(x)+(1-a-b)F_s(x)$$

siendo $0\leq a\leq 1, 0\leq b\leq 1$;$F_d$ una función escalonada;F_{ac},una función absolutamente continua y F_s ,una singular.

Supondremos conocidas las definiciones de singular,etc .Hacemos notar que mientras que 103 es de demostración inmediata,no lo es 104,que no es otra cosa que una versión del teorema de descomposición de Lebesgue(veánse demostraciones en R1).Llamaremos, como es habitual,densidad de probabilidad a la derivada casi seguro Lebesgue de $F_{ac}(x)$ cuando sea b=1,esto es,cuando la propia

F sea absolutamente continua.El que alguno de los coeficientes a ó b sea la unidad nos lleva a la siguiente

105 Definición: Una función de distribución de probabilidad $F(x)$ se dice de tipo puro,si,en la descomposición de 104,es la unidad a,b ó 1-a-b.

Ya se ha dicho cómo se llama F si es b=1.Si lo es a,se dice que F es discreta.Si es a=b=0,se dice que F es singular.Las distribuciones singulares no aparecerán en esta memoria.

1.2 Funciones características.Generalidades.

En Matemáticas,generalmente hablando,el método de las transformadas integrales es una herramienta que permite resolver en los elementos transformados problemas más o menos inatacables o insolubles en los elementos primitivos.La transformación debe poder realizarse para toda la clase de funciones o elementos en estudio.Debe ser biyectiva.Por último,conviene considerablemente que el problema planteado que ha originado esa transformación,que la ha inducido,sea fácilmente resoluble con los elementos transformados.

El Cálculo de Probabilidades tiene su propia y peculiar transformada integral.El problema que ésta debe resolver es encontrar la distribución de la suma de dos(vale un número finito)variables independientes.Nos referimos a la función característica.

106 Definición: Sea $F(x)$ una función de distribución de probabilidad.Se llama función característica de F a la función f,con valores complejos,y definida para todo número real t,de la manera siguiente:

$$f(t)= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)dF(x). \qquad (i^2 = -1)$$

Observemos que como el valor absoluto de $\exp(itx)$ es la unidad, f existe siempre,cualquiera que sea F.Más adelante,consideraremos f como función definida para todo número complejo z .

En contextos más generales,nuestra característica no es más que la transformada de Fourier de una medida.La integral que aparece er la definición es del tipo de Stieltjes-Lebesgue,teoría de integración que, como se advirtió, se supondrá conocida. En la teoría de la probabilidad hay otras transformaciones útiles:

107 Definiciones: a) Sea $F(x)$ una función de distribución discreta con saltos p_0, p_1, etc en los puntos 0,1, etc. Se llama función generatriz de F á

$$P(s) = \sum_{K=0}^{\infty} p_K s^K$$

Como $\sum_{K=0}^{\infty} p_K = 1$, P existe al menos en $|s| < 1$ y además es claro que $x \in (0,1) \Rightarrow P(x) < 1$.

b) Sea $F(x)$ una función de distribución de probabilidad cuyo intervalo soporte está contenido en $[0, \infty)$. A la expresión

$$L_F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sx)\,dF(x)$$

se le llama Transformada de Laplace de F.

La utilidad de estas transformaciones se restringe a la clase de distribuciones para la que están definidas. Dentro de ella, se comportan casi como las características, de las que listamos las propiedades más sencillas.

108 Teorema: Sea $f(t)$ una función característica cualquiera:

a) $f(0)=1$

b) $f(t)= \overline{f(-t)}$ (La barra indica complejo conjugado)

c) El módulo de f, para todo t real, no supera a la unidad.

d) $f(t)$ es uniformemente continua en R.

e) Si $g(t)$ es otra función característica y a,b son dos números no negativos que suman la unidad, $af(t)+bg(t)$ es otra característica. (Vale para un número finito de sumando

f) Para cualesquiera reales a,b

$$\exp(itb)f(at)$$

es siempre característica. Como es sabido, corresponde a la transformación lineal de variable aleatoria $aX+b$, donde $f(t)$ es precisamente la característica de la distribución de la variable aleatoria X.

g) Como consecuencia de f), $f(-t)$ es siempre característica.

h) Por último, de g) y e), Ref(t) -parte real de- , esto es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \; dF(x)$$

es siempre una función característica.

Las demostraciones correspondientes a 108 pueden verse en cualquier libro sobre el particular, por ejemplo, R3. Listamos a continuació como ejemplos a ser utilizados en lo sucesivo las funciones características de algunas distribuciones.

109 Relación de algunas características

a) Si F es la distribución uniforme en $(-r,r)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \; dF(x) = \frac{\operatorname{sen} rt}{rt}$$

b) Si F es N(o,1) (normal de media cero y varianza unidad), es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \; dF(x) = \exp(-t^2/2)$$

c) Si F es la gamma de parámetros a y p,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \; dF(x) = a^p/ (a-it)^p$$

d) Si F es la distribución de Poisson de parámetro w, es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \; dF(x) = \exp(w(\exp(it)-1))$$

e) Si F es la distribución beta de parámetros p y q,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \; dF(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k) \; (it)^k}{\Gamma(p+k+q)\Gamma(k+1)}$$

f) Si F es degenerada en x=a, esto es, discreta, con un único salto, de magnitud unidad, en x=a , es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \; dF(x) = \exp(ita)$$

Que la aplicación que a cada distribución hace corresponder su característica sea biyectiva, se deduce de la siguiente

110 Fórmula de inversión de P.Lévy

Sean a,b reales con $a<b$, F una distribución de probabilidad y f(t), la característica de F. Escribimos F(b-) por lim F(x) cuando $x \to b$, pero $x<b$. Se tiene:

$$\frac{F(b)+F(b-)}{2} - \frac{F(a)+F(a-)}{2} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{2\pi it} f(t)\, dt.$$

El integrando se define por continuidad-como b-a - para t próximo a cero,y la integral es entonces la de una función continua.En el caso particular de que tanto a como b sean puntos donde F es continua,o sea donde no presenta salto (*),el miembro de la izquierda se reduce a F(b) - F(a) .

111 Corolario: Sea f la característica de la distribución F y supongamos que se cumple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

Entonces,F es absolutamente continua y su densidad,h(x),es una función continua dada por

$$h(x)= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx)f(t)\, dt$$

El recíproco no es cierto.

Las demostraciones de 110 y 111 pueden encontrarse en R1,R3,R4 ó R10.En 127 damos un ejemplo de que no vale el recíproco.

En general,una característica toma valores complejos.Es fácil saber cuándo solamente toma valores reales.

112 Definición: Una función de distribución de probabilidadFse dice simétrica si se verifica

$$F(x)= 1 - F(-x-).$$

113 Proposición: Si f es la característica de F,

"f(t) es real para todo t si y sólo si F es simétrica"

Demostración: R4.

Las características reales cumplen la desigualdad que sigue y que nos será útil más adelante.

114 Desigualdad: Sea f(t) una característica real,entonces,

$$1- f(2t) \leq 4(1 - f(t)) \quad ,\text{para todo t real.}$$

Demostración: R4.

Terminamos este párrafo con las relaciones entre la existencia de momentos de una distribución F y la derivabilidad en el origen

(*) Una función monótona sólo admite discontinuidades de 1ª esp.

de su función característica.Recordamos que el momento n-ésimo de una distribución de probabilidad F es el valor de la integral,supuesta convergente, $\int_{\mathbb{R}} x^n \, dF(x)$.

115 Teorema: Sea f una característica y F la distribución asociada.

a) Si existe $\int_{\mathbb{R}} x^n \, dF(x)$ (n es natural !) ,entonces,para todo t real,existe $f^{(n)}(t)$,y además se verifica

$$f^{(n)}(0) = i^{-n} \int_{\mathbb{R}} x^n \, dF(x)$$

b) Si existe $f^{(2k)}(0)$,entonces existe para todo real $r \leq 2$

$$\int_{\mathbb{R}} x^r \, dF(x)$$

Demostración: R1

1.3 Convolución y Características

Lo que viene a decir este párrafo es que el producto de características lo es,hecho básico en la teoría de la factorización,tema central de este trabajo.

116 Definición: Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ dos funciones de distribución de probabilidad.A la función $F(z)$ definida como

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(z-x) \, dF_2(x)$$

se le llama convolución de F_1 y de F_2.Lo notaremos por $F_1 * F_2$.

117 Teorema: Sean F_i, i=1,2 dos funciones de distribución de probabilidad.Se verifica:

a) $F = F_1 * F_2$ es una distribución de probabilidad.

b) La convolución es operación conmutativa y asociativa.

c) Si $f_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \, dF_j(t)$, j=1,2,entonces

$$f_1(t) f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \, d(F_1 * F_2)(x)$$

118 Corolario: El producto de características siempre es característica.En particular,si f es cualquier característica, el módulo de f al cuadrado lo es .

El corolario es inmediato.Consecuencia directa de 117 y de 108g. La demostración de 117 puede hallarse en R4.

El resultado que sigue justifica la importancia de las característi cas en la Teoría de la Probabilidad.Veáse su demostración en R9.

119 Teorema: Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de distribución Fy G respectivamente.Entonces la distri bución de $X+Y$ viene dada por $F * G$ .El recíproco no es cierto.

Terminamos este párrafo con algunos resultados específicos que se usarán.Sus demostraciones están en R4.

120 Teorema: Si al menos una de las dos funciones de distribución de probabilidad F ó G es absolutamente continua, $F * G$ lo es.

121 Teorema: Sean F y G dos distribuciones de probabilidad discretas cuyos puntos de discontinuidad son respectivamente $(x_k)_k$ e $(y_r)_r$.

Entonces $H= F * G$ es también discreta y los puntos de discontinuidad de H son los elementos de la sucesión $(x_k+y_r)_{k,r}$

Además ,si es a_k el salto de F en x_k ,esto es,

$$a_k = F(x_k) - F(x_k-),$$

y es b_r el de G en y_r ,y si x=u es un punto de discontinuiddd de H,el salto de H en u vendrá dado por

$$\sum_{x_k+y_r=u} a_k b_r$$

122 Corolario: Sea H la convolución de las discretas F y G. " H tiene un número finito de puntos de discontinuidad si y sólo si cada una de las F,G tiene un nº finito de puntos de discontinuidad."

Además,si son respectivamente N,p y q los números de puntos de discontinuidad de H,F y G, se tiene:

$$p+q-1 \leq N \leq pq.$$

Hasta ahora hemos visto que las características constituyen una transformación bien definida para toda distribución,y biyectiva,y que a la convolución hacen corresponder el producto.Realmente son estas propiedades las que caracterizan la transformación.(Veáse el apéndice número 1).

1.4 Convergencia débil y Características

123 Definiciones: Se dice que la sucesión de funciones no decrecientes $F_n(x)$ converge débilmente a otra función no decreciente $F(x)$,si,siempre que F sea continua en a,es

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$$

Se dice que la sucesión de funciones de distribución(no necesariamente de probabilidad) converge completamente a la función no decreciente F,si F_n converge débilmente a F y si además,se cumple:

$$\lim (F_n(+\infty)- F_n(-\infty))= F(+\infty)- F(-\infty)$$

124 Teorema (Compacidad débil de Helly)

Toda sucesión uniformemente acotada de funciones monótonas no decrecientes contiene una subsucesión que converge débilmente a cierta F,acotada y monótona.

Nota: Uniformemente acotada quiere decir que existe A positivo e independiente de n,de forma que,para todo índice n,

$$F_n(+\infty) - F_n(-\infty) < A$$

Otra: Repetimos que por $G(\pm\infty)$,entendemos lim G(x) para $x\to\pm\infty$

Demostración: R1,R3,R4 ó R11.

125 Teorema: (Criterio de compacidad completa)

Sean F_n funciones de distribución no necesariamente de probabilidad.Toda sucesión infinita de elementos de la sucesión F_n contiene al menos una subsucesión de funciones que converge completamente si y solamente si para cualquier $w>0$, existe un número $A > 0$,tal que si $a>A$,se tiene para todo n,

$F_n(+\infty)-F_n(-\infty) - (F_n(+a) - F_n(-a))=$

$= (F_n(+\infty) - F_n(+a)) + (F_n(-a) - F_n(-\infty)) < w.$

Demostración: R1.

Terminamos este párrafo con el famoso teorema de continuidad de Levy y Cramer.Su demostración puede verse en R10.

126 Teorema: Sea F_n una sucesión de distribuciones de probabilidad y f_n la sucesión de sus respectivas características.Entonces,la sucesión F_n converge débilmente a una función de distribución F si y sólo si f_n converge para cada t a una función continua en el origen.La función límite f(t) es entonces la característica de la distribución F.

1.5 Algunas condiciones suficientes

Se conocen,por supuesto,condiciones necesarias y suficientes -simultáneamente- para que una función sea característica.No aparecerán en lo sucesivo y por tanto no las reseñaremos.Pueden leerse en R4 las de Bochner y Cramer y en R7 la de Khinchine.

Una condición suficiente muy útil es la siguiente,debida a G.Pólya.

127 Condición de Pólya. Sea f una función de R en R,continua,par, $f(0)=1$,convexa en $t>0$ ($) y $\lim f(t) = 0$ si $t \longrightarrow \infty$ .Entonces f es la característica de una distribución absolutamente continua

Demostración: R12

Así,por ejemplo,la función

$$f(t)= \frac{1}{1+|t|}$$

verifica esas condiciones y será característica.Obsérvese que

$$\int |f(t)|dt$$

no existe,luego el recíproco de 111 no es cierto.

La condición anterior puede refinarse tal como hicieron Dugué y

---

$ O sea,

$$f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2}, \quad \forall t_1, t_2 > 0$$

Girault (R13), y tal como la vamos a usar más adelante.

128 Teorema: Toda función $f(t)$ real, no negativa, menor que uno si $t \neq 0$, par, continua, $f(0)=1$, convexa en $(0,h)$ y periódica de período $2h$, es una función característica.

1.6 Leyes Infinitamente Divisibles

129 Definición: Una función característica se dice infinitamente divisible, si para cada n natural, es la n-ésima potencia de alguna función característica.

Esto quiere decir, que si f es la característica infinitamente divisible, para cada n natural, existe otra característica f_n de manera que

$$f(t) = (f_n(t))^n$$

La función $f_n(t)$ está unívocamente determinada por $f(t)$ mediante la relación:

$$f_n(t) = (f(t))^{1/n}$$

supuesto que se ha elegido la rama principal para la raíz n-ésima.

El interés primordial de esta teoría está íntimamente ligado al problema central del límite y a la teoría de los procesos de incrementos independientes (veáse R6 y R14, respectivamente). Estos aspectos no nos van a interesar en absoluto. Sí tendrá relevancia el papel que esta clase de distribuciones ($) desempeña en la teoría de la factorización. He aquí unas propiedades elementales que más adelante nos serán de utilidad. Para su demostración, R6.

130 Propiedades de las infinitamente divisibles.

a) Sea $f(t)$ característica infinitamente divisible; entonces $f(t) \neq 0$, para todo real t. El recíproco no es cierto.

b) El producto de un número finito de características infinitamente divisibles es asimismo infinitamente divisible.

c) Si cada f_n es una característica infinitamente divisible, y

---

($) Una distribución de probabilidad se dice infinitamente divisible cuando lo sea su característica asociada.

$g(t)=\lim f_n(t)$ es una función característica, g es infinitamente divisible.

d) Si $f(t)$ es característica infinitamente divisible, $(f(t))^r$, es, para todo r estrictamente positivo, una característica. El recíproco es trivialmente cierto.

e) Sea $f(t)$ una característica cualquiera, y sea a cualquier número estrictamente positivo. Entonces

$$\exp(a(f(t)-1))$$

es una característica infinitamente divisible.

Acabamos el párrafo dando las representaciones canónicas de esta clase de distribuciones

131 Representación canónica de Lévy y Khinchine

"f(t) es una función característica infinitamente divisible si y sólo si puede escribirse

$$\log f(t) = ita + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x)$$

donde a es un número real independiente de t, G es una función monótona no de creciente y acotada de forma que $G(-\infty) = 0$. "
El integrando se define por continuidad para $x=0$ como $-t^2/2$.
La representación es única.

132 Representación de Kolmogorov

"f(t) es la característica de una infinitamente divisible con varianza si y sólo si puede escribirse

$$\log f(t) = ita + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{dK(x)}{x^2}$$

donde a es una constante real, K es una función monótona no decreciente y acotada tal que $K(-\infty) = 0$. "
El integrando se define por continuidad para $x=0$ como en 131.
La representación es única.

133 Representación de Lévy

" f(t) es una característica infinitamente divisible si y sólo si puede escribirse $\log f(t) =$

$$= ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) + \int_{+0}^{+\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u)$$

siendo

- M y N, funciones no decrecientes en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$ respectivamente, tales que $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$
- a es una constante real y σ^2 es una constante real positiva ó nula.
- Para todo número $w > 0$ es

$$\int_{-w}^{0} u^2 \, dM(u) < \infty \quad y \quad \int_{0}^{w} u^2 \, dN(u) < \infty$$

La representación es única.

Las expreseiones $\int_{-\infty}^{-0}$ y $\int_{+0}^{+\infty}$ indican que el punto u= 0 está excluido del conjunto de integración.

Una exposición detallada de los anteriores resultados (131 á 133), con demostraciones y alcance de estos resultados puede verse en R6. En el apéndice 2 puede verse la expresión de las funciones M , N , G y K para algunas infinitamente divisibles conocidas.

1.8 Cuestiones diversas

En primer lugar, algunos resultados sobre mixturas.

134 Definición. Dados n números reales no negativos y que sumen la unidad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y n caracterśiticas $f_1, \ldots, f_n$, se llama mixtura de las f_i con los números a_i a la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)$$

que, en virtud de 108e, es siempre una característica.

Esta definición se extiende, en cierto modo, al caso numerable.

135 Teorema: Sea f_n (t) una sucesión arbitraria de características.

La condición n. y s. para que

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t)$$

sea una característica para toda sucesión de características es que $a_k \geqslant 0$ y

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

Con la ayuda de 135 se prueba:

136 Teorema: Si f(t) es una caracterítica cualquiera y p es un nº real mayor que la unidad, la expresión

$$\frac{p - 1}{p - f(t)}$$

es una característica infinitamente divisible.

Seguimos con un resultado sobre transformaciones de características. Su demostración, al igual que la de los dos anteriores puede encontrarse en R4.

137 Teorema: Sea g(t) una característica con varianza finita.

Entonces la función h(t) definida por

$$h(t) = \frac{g^{(2)}(t)}{g^{(2)}(0)}$$

es siempre característica.

Necesitaremos saber lo que es la mediana:

138 Definición: x = m es una mediana de la función de distribución de probabilidad F(x) si para todo nº w estrictamente positivo es

$$F(m-w) \leqq 1/2$$

$$F(m+w) \geqq 1/2.$$

Es sabido que la teoría de las funciones absolutamente monótonas nació para caracterizar las series de potencias con coeficientes positivas. Bernstein fue su creador. Para trabajar, pues, con generatrices de probabilidad nos serán útiles:

139 Definición: Una función h real se dice absolutamente monótona

en el intervalo $[0,b)$ si es continua, indefinidamente derivable y $h^{(n)}(x)$ es no negativo para cada x, $0 < x < b$. y $\forall n = 0,1,\dots$

140 Teorema: h es absolutamente monótona si y sólo si $h(0) \geq 0$ y $h^{(1)}$ es absolutamente monótona.

Demostraciones y más detalles pueden verse en R3.

- El Funcional de Khinchine.

En una publicación de 1937 (R15), introdujo Khinchine el siguiente operador que ha mostrado ser muy útil en la teoría de la factorización.

Sea $g(t)$ una característica cualquiera. Existe-108d- un nº real $\underline{a}$ de forma que si $0 \leq t \leq a$, es $|g(t)| > 0$. Para un nº a fijo que cumpla eso, se tiene

141 Definición del Funcional de Khinchine

$$N_a(g(t)) = N_a(g) = -\int_0^a \log|g(t)| \, dt$$

142 Propiedades básicas del funcional de Khinchine

a) $N_a(g)$ es real y no negativo.

b) $N_a(\exp(itw)) = 0$, para todo real w.

c) Si g es producto de las características f y h, entonces,

$$N_a(g) = N_a(f) + N_a(h)$$

d) Se verifica siempre la desigualdad:

$$N_a(g) \geq \int_0^a (1 - |g(t)|) \, dt$$

e) $N_a(g) = 0$, si y solamente si g es la característica de una distribución degenerada.

Demostraciones: R4 ó R5.

Terminamos párrafo y capítulo con la función de concentración.

- La función de concentración de Lévy.

Esta idea fue introducida por Levy en R8.

143 Definición: Sea X una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. A la función
$$Q(l) = \sup_x \Pr (x \leq X \leq x+l)$$
se le llama función de concentración de la variable aleatoria X.

144 Propiedades de la función Q

a) $0 \leq Q(l) \leq 1$

b) Q es una función creciente con su argumento.

c) Si la función de distribución de X es continua (esto es, absolutamente continua o singular), $Q(0) = 0$.

d) Lema de Levy

Si es $Z = X + Y$, variables independientes, es
$$Q_Z(l) \leq \min (Q_X(l) , Q_Y(l))$$

CAPITULO II : FUNCIONES CARACTERISTICAS ANALITICAS

La factorización de distribuciones es una teoría mucho más analítica que probabilística.La herramienta base es la función característica considerada como función de variable compleja. El método a utilizar,la factorización de funciones enteras.Es por esta razón que incluimos un breve resumen de la teoría de la factorización de funciones enteras y otros resultados que se van a usar.

La parte final del capítulo expone los hechos más notables de las funciones características analíticas y algunos ejemplos y resultados del autor.

2.1 Complementos de la teoría de funciones

En primer lugar,recordamos cómo no pueden estar situados los ceros de una función analítica y el teorema del módulo máximo.

201 Teorema. Los ceros de una función analítica no constantemente nula son puntos aislados.Con otras palabras,si $f(z)$ es una función no idénticamente nula,analítica en un conjunto abierto y conexo (simplemente) que incluya el punto $z = a$, existe un nº positivo r,tal que en el disco abierto de centro a y radio r,$f(z)$ no tiene otros ceros salvo quizá $z=a$.

202 Teorema del módulo máximo. Sea $f(z)$ analítica en un conjunto abierto y simplemente conexo D.Sea C la frontera de D. Supongamos que existe una constante M de forma que en C,

$$|f(z)| \leq M.$$

Entonces es,

$$|f(z)| < M$$

en todos los puntos interiores de D,salvo que f sea constante,en cuyo caso es,en todas partes

$$|f(z)| = M.$$

Dedicamos el resto del párrafo a algunas cuestiones de gran, interés en lo que sigue, sobre las funciones enteras.

203 Definición. Una función holomorfa en cada parte finita del plano se llama una función entera.

Las funciones enteras más sencillas son los polinomios. Al igual que un polinomio de grado n, y con ceros en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, puede factorizarse así: Si P es ese polinomio,

$$P(z) = P(0)\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$$

se plantea el problema de si existiría una fórmula similar, atendiendo a los ceros que pudiese poseer, para factorizar cualquier función entera. El problema no es inmediato, pues como puede existir una infinidad de ceros, el producto extendido a esos ceros

$$\prod_{K}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)$$

podría ser divergente.

Llamaremos a las expresiones

$$E(u, 0) = 1 - u$$

$$E(u, p) = (1-u)\exp(u + u^2/2 + \ldots + u^p/p)$$

donde p = 1,2, etc , factores elementales. Cada uno de ellos sólo se anula en el punto u=1. Se tienen:

204 Teorema (Weierstrass)

a) Dada cualquier sucesión de números complejos cuyo único punto de acumulación sea infinito z_1, z_2, etc , existe una función entera con ceros en esos puntos y sólo en ellos.

b) Si f(z) es entera y $f(0) \neq 0$, entonces

$$f(z) = f(0)\,P(z)\exp(g(z))$$

siendo g una función entera y P un producto de factores elementales. La factorización no es única.

Comentemos por un momento la demostración del teorema que arroja luz sobre este asunto.Se prueba que la función cuya existencia postula a) es

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n-1\right)$$

en donde los p_n forman una sucesión de enteros positivos de forma que, siendo r_k el módulo del cero z_k, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (r/r_k)^{p_k}$$

converja para todos los valores de r.Esta elección puede conseguirse siempre.En la parte b),fórmese,tomando como P la f de la parte a),la expresión

$$L(z) = \frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} - \frac{P^{(1)}(z)}{P(z)} \qquad (A)$$

L es una función entera.Entonces,también lo es

$$\int_0^z L(z)\,dz$$

y

$$f(z) = f(0)\,P(z)\,\exp\left(\int_0^z L(z)\,dz\right)$$

con sólo integrar (A) y tomar exponenciales.

Como estas demostraciones dependen de la adecuada elección de los p_k para que resulte convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (r/r_k)^{p_k},$$

es fácil entender que ni la función f de la parte a) quedaunívocamente determinada por sus ceros,ni la factorización que proporciona b) es única.Conviene refinar algo más,con objeto de poder decir algo más sobre la función g de 204b.Persiguiendo este objetivo,introducimos:

205 Definición. Sea f una función entera.LLamemos M(r) al valor máximo del módulo de f en el disco cerrado de centro el origen y radio r.Decimos que f es de orden finito,si existe un A > 0

tal que cuando $|z| = r$ tienda a infinito,se tenga (\$)

$$M(r) = O\left(e^{r^A} \right), \qquad (B)$$

esto es,

existe K constante positiva, de forma que

$$M(r) < K e^{r^A} \text{, para } r \text{ suficientemente grande.}$$

206 Definición. Al ínfimo w de los números $A > 0$,para los que (B) es cierto,se le llama el orden de la función. Así,si f es de orden w,es,para todo $x > 0$,

$$M(r) = O\left(e^{r^{w+x}} \right)$$

pero no para números $x < 0$.Esto equivale a decir que

$$w = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

Desde luego w es no negativo.Así,por ejemplo,un polinomio,y por convenio las constantes,es de orden cero, e^z es de orden uno etc.

207 Teorema. Sea f entera de orden w,$f(0) \neq 0$ y tenga f ceros en $z_1, \ldots$ Entonces,si es $r_k = |z_k|$, la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-a} \qquad (C)$$

converge siempre que a sea mayor que w

208 Definición. Al ínfimo de los $\underline{a}$ para los que (C) converge se le llama el exponente de convergencia de ceros.Lo notaremos v.

Según 207,se tiene que $\underline{v}$ es menor ó igual que $\underline{w}$ .Puede darse la desigualdad estricta,como por ejemplo en la función exp(z).En particular,si f tiene un nº finito de ceros,es $v = 0$.Por lo tanto,el que

(\$) Según 202,el máximo de M puede suponerse sobre el contorno del disco.

sea v estrictamente positivo implica que hay una infinidad de ceros.

Como consecuencia de lo anterior, cuando f sea entera de orden finito, existe un entero p, mayor que cero, independiente de n, tal que

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

converge para todos los valores de z. Si llamamos $k+1$ al menor entero positivo para el que (C) converge, se tiene la siguiente

209 Definición. Al entero no negativo k se le llama género del producto canónico formado con los ceros de f. El producto canónico es precisamente el producto de los factores elementales en que cada número p_n coincide con el género.

Así, si v no es entero, el género es la parte entera de v. Si v es entero, el exponente de convergencia v y el género del producto canónico k coinciden si la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j^{-v}$$

diverge; si convergiera, $k = v-1$. Por lo tanto,

$$k \leqslant v \leqslant w$$

Estamos ahora en condiciones de formular un resultado clave:

210 Teorema de factorización de J. Hadamard.

Sea f una función entera de orden finito w, $f(0) \neq 0$, y f tiene ceros en los puntos z_1, z_2, etc. Entonces

$$f(z) = P(z) \exp(Q(z))$$

siendo Q un polinomio de grado no mayor que w, y P, el producto canónico formado con los ceros de f.

Obsérvese que 210 mejora 204 pues dice qué forma ha de tener la función entera g. El resultado que sigue nos será útil

211 Teorema. Sea f entera de orden w no entero y sea v el exponente de convergencia de ceros de f. Entonces, $w = v$.

El resultado anterior 211 es consecuencia de 210 y del siguiente:

212 Teorema. El orden de un producto canónico-que siempre es una función entera-coincide con el exponente de convergencia de sus ceros.

Así pues, si

$$f(z) = P(z)\ \exp(Q(z))$$

y el producto canónico P es de orden v y Q es un polinomio de grado q, se tiene, si w es el orden de f, que

$$w = \max\ (\ q, v\ )$$

213 Definición. Se llama género de una función entera al mayor de los enteros p ó q , siendo p el género del producto canónico formado con sus ceros, y q el grado del polinomio Q(z), asociado a f según 210.

Informalmente hablando, el orden es una medida del crecimiento del módulo de una función entera. Dentro de las funciones enteras con el mismo orden w finito y positivo, se distingue la noción de tipo, idea que compara el crecimiento del módulo entre las de un mismo orden.

214 Definición. Sea f entera de orden finito y positivo w. Se dice que f es de tipo t si, para todo u mayor estricto que cero, se tiene

$$M(r) = O\ (\ e^{(t+u)r^w}\ ),\text{para r tendiendo a } \infty,$$

no siendo cierta la relación anterior para números u estrictamente negativos.

Equivalentemente, f, de orden w, es de tipo t, si

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\log M(r)}{r^w} = t$$

Así, la función e^{2z}, es de orden unidad, pero de tipo dos.

Las siguientes fórmulas dan orden y tipo en función de los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de f. Si es

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$$

y f es de orden w,se puede ver que

$$w = \overline{\lim_{K\to\infty}} \frac{k \log k}{\log |c_k|^{-1}}$$

y,si además es $0 < w < \infty$, la expresión

$$(ew)^{-1} \overline{\lim_{K\to\infty}} k\, |c_k|^{(w/k)}$$

da el tipo de f.

215 Definiciones. Supongamos f entera de orden w finito.

- Si es t,su tipo,igual a cero,se dice que f es de tipo mínimo.
- Si t es finito y mayor que cero,de tipo normal.
- Si t es infinito,se dice que f es de tipo máximo.
- Por último,si es w = 1 y t finito ó w es menor que 1,se dice que f es una función de tipo exponencial.

Terminamos el párrafo con el resultado que sigue que aparecerá tangencialmente.

216 Teorema. Una función entera no constante de orden w que no exceda la unidad y tipo mínimo no puede estar acotada sobre recta alguna del plano complejo.

Nota bibliográfica:

La inmensa mayoría de estos resultados se encuentran detallados y demostrados en R16,por ejemplo.
Las cuestiones relativas al tipo de una función entera pueden verse en R17.
El último resultado,216,está extraido de R5 .
Obviamente estas referencias a la literatura matemática no son las únicas.Cualquier texto o monografía sobre teoría de funciones analíticas -nivel intermedio al menos- puede servir igual que la obra básica,R16,utilizada.

2.2 Funciones características analíticas

Estudiamos aquí las funciones características como funciones de una variable compleja. Aparecerán problemas de convergencia hasta ahora no presentados. La siguiente definición parece lógica:

217 Definición. " $h(t)$ es una función característica analítica en el disco abierto de centro el origen y radio A (A es un nº positivo), si existe una función de la variable compleja t, analítica en $|t|<A$, y que coincida con h cuando t sea real".

Como una función analítica en $|t|<A$, es indefinidamente diferenciable en $t = 0$, resulta que si una característica es analítica, corresponde necesariamente a una distribución de probabilidad $F(x)$ para la que, para todo n natural,

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, dF(x) \text{ , es finito.}$$

Es claro que el recíproco no es cierto (veáse 219). Resumiendo:

218 Teorema. " La función de distribución $F(x)$ posee una característica analítica si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

a) $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, dF(x)$ es finito para todo n

b) El límite superior de la expresión

$$\left[\frac{|a_k|}{k\,!} \right]^{(1/k)}$$

es finito.

Demostración: Trivial

219 Ejemplo

Damos un ejemplo de que puede ser F una distribución con todos los momentos y, sin embargo, no tener una característica analítica.

Parece lógico que habrá que pensar en una distribución que no esté determinada por sus momentos.En efecto,buscando en esa dirección,se obtiene

* Para cada nº b del intervalo $[0,1]$,la función

$$f(x,b) = (1/24)\ (\ 1 - b\mathrm{sen}\ x^{1/4}\ )\ \exp(\ -x^{1/4}\ )$$

es una densidad de probabilidad en el semieje positivo.

** Los momentos vienen dados por

$$a_n(b) = \int_0^{\infty} x^n\ f(x,b)\ dx = \frac{(4n+3)!}{6}$$

que son independientes de b.Estos a_n no verifican desde luego 218b.Los cálculos figuran en el Apéndice nº 3.

Los problemas de convergencia que se planteaban al principio se presentan porque cuando t es complejo,el módulo de

$$\exp\ (itx)$$

no está acotado siempre claramente.El siguiente resultado es fundamental y establece la existencia de un "conjunto de convergencia".

220 Teorema. Existencia de una banda de regularidad.

Supongamos que $g(t)$ es una característica analítica en el disco $|t| < A$. (A,positivo).Existen entonces dos números reales a,b,tales que $a \geqslant A, b \geqslant A$ y de forma que en

$$-a < \mathrm{Im}(t) < b \qquad (\$)$$

$g(t)$ es holomorfa y coincide con la integral de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\ dF(x).$$

(\$) Im(t) es,como puede suponerse,la parte imaginaria del número complejo t.

Al conjunto $-a < \mathrm{Im}(t) < b$, se le llama banda de regularidad de la característica g, y puede ser todo el plano ó tener una ó dos fronteras horizontales.

Si escribimos

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \exp(itx)\, dF(x) + \int_{-\infty}^{0} \exp(itx)\, dF(x)$$

y hacemos el cambio de variable $t = iw$, resulta que

$$\int_0^{+\infty} \exp(itx)\, dF(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-wx)\, dF(x)$$

es la transformada de Laplace de una función monótona y teniendo en cuenta el siguiente

221 Teorema. La transformada de Laplace de una función monótona tiene una singularidad en el punto real de su eje de convergencia

y que lo mismo podría hacerse para la integral extendida a la parte negativa, se tiene el siguiente

222 Corolario. Si la banda de regularidad de $g(t)$ no fuese todo el plano, entonces los puntos imaginarios puros de las fronteras de esta banda son puntos singulares para $g(t)$.

Las demostraciones de 220 y 221 pueden verse en R5 y en R19, respectivamente. 222 es consecuencia inmediata de éstos. Reescribimos 222 de una forma a veces útil:

223 Corolario. Una función analítica en algún entorno del origen, tal que su singularidad más próxima al eje real no se halle situada sobre el eje imaginario no puede ser una función característica.

El corolario que precede, como toda condición necesaria, puede usarse en el reconocimiento de funciones características. Ilustrando su uso, proponemos el siguiente ejemplo:

224 Ejemplo. Sea n un número natural. La función

$$h(t) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4n} t^{2k}}$$

no puede ser característica de probabilidad.

Demostración: Claramente h cumple las condiciones necesarias elementales para ser característica (108a,b,c,d),y como por otra parte su desarrollo en serie de potencias en torno al origen es

$$h(t) = 1 - t^2 + o(t)$$

donde

$$\lim_{t\to o} \frac{o(t)}{t} = 0$$

no se puede alegar consideración alguna en torno a sus momentos($).

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=0}^{4n} t^{2k} = \frac{t^{4n+2} - 1}{t^2 - 1} \qquad (A)$$

habrá que ver cuando (A) es cero.Los puntos t =1 y t = -1 son singularidades evitables,ypor consiguiente,bastará ver,cuando es

$$t^{4n+2} = 1.$$

Esto es,

$$t = \exp\ (\ 2\pi ik/4n+2\ );\ k= 0,1,\dots,4n+1$$

Ahora bien,para que

$$\cos \frac{2\pi k}{4n+2} = 0,$$

ha de ser

$$\frac{2\pi k}{4n+2} = (2r+1)\cdot\pi/2, \text{con } r, \text{un número entero.}$$

Osea,ha de ser

$$k = (8nr+4n+4r+2)/4 = 2nr+n+r+\frac{1}{2}$$

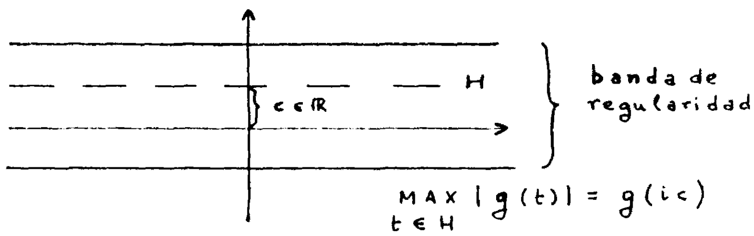
($) Así,por ejemplo, $\exp(-t^4)$ no puede ser característica pues es $\exp(-t^4) = 1 - t^4 + o(t)$,y al faltar el término en t^2,correspondería a una distribución con varianza nula,esto es,a una distribución degenerada,cuya f.c. viene dada por exp(itb). (R 10)

Como k es entero,esta igualdad es imposible,así que no hay raíces imaginarias puras de (A).Entonces la singularidad más próxima de h,que será la raíz del denominador con módulo mínimo,no está sobre el eje imaginario,y h no puede ser una función característica, que era lo que queríamos comprobar.

Las funciones características analíticas poseen la llamada "ridge property".Los siguientes resultados lo garantizan.

225 Teorema. Sea g una característica analítica.Entonces,el módulo de g alcanza su máximo,tomado a lo largo de cualq uier horizontal dentro de la banda de regularidad,en el punto intersección de esta horizontal y el eje imaginario.

Demostración: R5.La figura ilustra el contenido de 225.



226 Corolario. Una función característica analítica g no puede anularse en punto alguno del eje imaginario dentro de su banda de regularidad.Además,ceros y puntos singulares están simétricamente situados respecto al eje imaginario

Demostración: La primera parte sigue de 225 y de 201.La segunda,del hecho de ser $\overline{g(t)} = g(-\bar{t})$

Si llamamos a,b a las partes real e imaginaria respectivamente de t,lo que dice 225 es que

$$|g(a+ib)| \leqslant g(ib)$$

Observemos que,si c es real,g(ic) es siempre real y positivo.La desigualdad anterior es la propiedad definitoria de las "funciones en cresta",ó"ridge property".

Cuando la banda de regularidad es todo el plano,se dice que estamos ante una característica entera.El primer resultado importante es que el módulo de una característica entera no puede variar arbitrariamente. Su demostración puede verse en R5 ó R4.

227 Teorema. Sea g característica entera no constante. El orden de g es al menos la unidad.

Las características enteras de tipo exponencial positivo están perfectamente caracterizadas.

228 Teorema. Sea F(x) una distribución de probabilidad con intervalo soporte acotado que no se reduce a un punto.

- La característica f(t) de F es entera de tipo exponencial positivo y orden uno con infinitos ceros, que no tienen por qué ser necesariamente reales.
- Una característica entera de orden unidad y tipo exponencial positivo corresponde siempre a una distribución como F.

Demostración: R4.

Se prueba además que si el tipo es p, el intervalo soporte de F está contenido en $[-p,p]$.

229 Ejemplo. Construimos una familia de distribuciones con características enteras de orden unidad y tipo t prefijado. La característica de la distribución uniforme en $[-r,r]$ es (109a)

$$\frac{\text{sen } ru}{ru}$$

Desarrollándola en serie de potencias y aplicando las fórmulas de 214, se tiene

$$\frac{\text{sen } ru}{ru} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{u^{2k} r^{2k}}{(2k+1)!}$$

Aplicando la fórmula, teniendo en cuenta que $w=1$, queda:

$$\frac{r}{e} \lim \left[\frac{(2k)^{2k}}{(2k+1)!} \right]^{1/2k} \underset{2k=j}{=} \frac{r}{e} \lim \left[\frac{j^j}{(j+1)!} \right]^{1/j} =$$

$$= \frac{r}{e} \cdot \frac{1}{e^{-1}} = r. -$$

230 Ejemplo. Contrarrestando un poco el ejemplo anterior, comprobamos que la distribución beta de parámetros p y q posee una característica entera de orden unidad y tipo unidad, independiente de p y q.

Análogamente al caso anterior:

$$\frac{1}{e} \lim \left[\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \; \frac{\Gamma(p+k) \quad k^k}{k! \quad \Gamma(p+q+k)} \right]^{1/k} =$$

$$= \frac{1}{e} \lim \frac{1}{k} \cdot k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \frac{p+k-1}{p+q+k-1} = 1 .-$$

Según la observación anterior, era de esperar que, en 230, el tipo fuese al menos la unidad. El problema de determinar características enteras de orden y tipo prefijados es sumamente difícil. Los resultados de este estilo están perfectamente estudiados y dependen de la cola de la distribución. Véase, por ejemplo, R20.

Por otra parte, y usando sólo hechos de la teoría de funciones, se pueden dar multitud de condiciones, todas negativas, sobre cuando determinada clase de funciones enteras con propiedades prefijadas sobre su orden y tipo, no son características. Por ejemplo:

231 Teorema. No existen características enteras de orden 1 y de tipo mínimo.

Demostración. Toda característica está acotada sobre el eje real (108a). Según 216, una función entera de orden uno y tipo mínimo no puede estar acotada sobre recta alguna.

232 Teorema. Una función entera de orden finito w mayor que 2, cuyo exponente de convergencia de ceros v sea estrictamente menor que w no puede ser característica.

Demostración: R4.

Nota: Si w fuese no entero, según 211, ó w = v, ó la función no sería entera, y ya estaría probado.

Los resultados que preceden,y muchos otros que usan la misma técnica,no son otra cosa que parafrasear hechos clásicos de la teoría de funciones en el terreno de las características.Hay que hacer notar que ese viejo edificio de la teoría de funciones,hoy tan olvidado,se ha visto recientemente ampliado por probabilistas estudiosos de las características enteras.De cualquier forma,estos resultados no nos interesan para la segunda parte de esta memoria. El autor,sin embargo,se permite contribuir,en esta línea,con una condición suficiente

233 Teorema. Sea P(z) un producto canónico de género cero o uno,y de forma que sus ceros sean todos imaginarios puros.Entonces,

$$\frac{1}{P(z)}$$

es una función característica

Demostración:

Supongamos que los ceros son $ia_1, ia_2, \ldots$ etc,donde a_j es real para cada j.

Si el género fuese la unidad,de 208 y 209,se sigue

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{ia_k}\right) \exp(z/ia_k)$$

Llamando $h_n(z)$ á

$$h_n(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \left(1- \frac{z}{ia_k}\right) \exp(z/ia_k)}$$

resulta que,si z es real,$h_n(z)$ es la característica de la distribución de la suma de n variables aleatorias independientes Y_s, s=1,2,...n .Cada Y_s es

$$X_s - \frac{1}{a_s},$$

donde X_s sigue una distribución gamma de parámetros 1 y a_s. Véase:109c y 117 á 119 .

Según el teorema de continuidad 126,como

$$\lim_n h_n(z)$$

es una función continua en 0,será característica,como se quería demostrar.

Si el género del producto canónico fuese 0,según 208 y 209,será

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{ia_k} \right)$$

y se razona como antes.La diferencia ahora está en que en este segundo caso aparecen sumas de gammas no trasladadas.Lo demás es igual.

Realmente se ha probado algo más:

234 Corolario. En las condiciones de 233,

$$\frac{1}{P(z)}$$

es una característica infinitamente divisible.

Demostración:

La distribución gamma,trasladada o no,es infinitamente divisible(Véase 130b y apéndice nº 2).Basta tener en cuenta ahora 130c,pues la función límite de las características infinitamente divisibles $h_n(z)$, es,según 233,una característica.

34

SEGUNDA PARTE

CAPITULO III : FACTORIZACION

Se expondrán aquí los resultados más generales sobre la factorización de distribuciones y las contribuciones del autor a esta teoría. Dicha teoría se simplifica notablemente si se supone que las distribuciones a factorizar poseen características analíticas.La parte final del capítulo recoge los resultados más notables sobre el particular.Se dan abundantes ejemplos.

3.1 Aritmética de distribuciones.Generalidades.

Ya se comentó en la Introducción General de qué trataba esta teoría.Con precisión,damos la siguiente

301 Definición. Diremos que una función característica $f(t)$ es factorizable si puede escribirse como producto de dos características de forma que ninguna de ellas corresponda a una distribución degenerada. Una función de distribución de probabilidad se dirá factorizable o descomponible si su característica asociada es factorizable.

El que ninguna de las características factores corresponda a una distribución degenerada es una condición que,salvo que se quiera una definición vacía de contenido,no se puede suprimir.En efecto, siempre serían características (109f y 118) $\exp(-it)$ y $f(t)\exp(it)$,y, por tanto,si se admiten estos factores,toda característica verificaría la definición.

Vamos a ver que la definición tiene contenido.Esto es,vamos a probar que existen características no factorizables.

302 Ejemplo. Sean $0<p<1$, $0<q<1$, $p+q = 1$, a,b reales,$a\neq b$.Entonces la función característica

$$f(t) = p \exp(iat) + q \exp(ibt)$$

es no factorizable.

Lo que habrá que ver es que no existen dos características g y h,tales que $gh = f$ y ni g ni h corresponden a causales.

El ejemplo tiene su sentido pues,108e,f es característica.Supongamos que f fuese factorizable,o sea, $f = gh$. De los resultados 121 y 122, se sigue que tanto g como h corresponderían a distribuciones discretas y que,si llamamos m y n al número de puntos de discontinuidad de las funciones de distribución asociadas a g y h respectivamente,debería tenerse,

$$m+n-1 \leq 2 \leq mn$$

así que

$$m+n \leq 3$$

y además

$$2 \leq mn$$

luego las posibles soluciones son (en números enteros!)

$$m = 1 \ \text{y} \ n = 2$$

ó

$$m = 2 \ \text{y} \ n = 1 \ ,$$

así que uno de los factores es siempre de una degenerada y f no es factorizable.

El ejemplo anterior prueba que existen características no factorizables.A veces,nos referiremos a ellas como primas por la similitud que a continuación exponemos.

Por el título genérico de"aritmética de distribuciones",término al parecer acuñado por Paul Lévy,se debe entender la teoría de la factorización: o sea,calcular todos los factores de una función característica.Esto puede tomarse parecido a descomponer un número en sus factores primos y de ahí viene lo de aritmética de distribuciones.Hay que reconocer que el parecido no va mucho más allá del nombre.Damos dos razones fundamentales:

* Primera Razón

La factorización de una característica en características primas no es necesariamente única.Daremos un ejemplo.Con este fin,nos viene muy bien el siguiente ejercicio propuesto por Feller (R2)

303 Proposición. Sea X una variable aleatoria que con probabilidad $1/r$ toma los valores $0,1,2,\dots,r-1$ .Entonces,si r no es primo,es posible expresar X como suma de dos variables independientes que toman valores enteros.

El enunciado que tiene 303 nos hace pensar que,variando las descomposiciones de r,se obtendrán diferentes factorizaciones de la distribución de X.Habrá que tantear luego que estos factores sean primos,indescomponibles o no factorizables.

Demostración de 303:

Utilizaremos la función generatriz.La correspondiente a la distribución de X vendrá dada por

$$P(s) = \frac{1+s+s^2+\dots+s^{r-1}}{r}$$

De la identidad,supuesto r =ab,

$$1+s+s^2+\dots+s^{r-1} = 1+s+s^2+\dots+s^{ab-1} =$$

$$= (1+s+s^2+\dots+s^{a-1})(1+s^a+s^{2a}+\dots+s^{(b-1)a}),$$

se deduce,que,como el primer factor consta de a sumandos y el segundo de b,es

$$P(s) = \frac{1+s+\dots+s^{a-1}}{a} \cdot \frac{1+s^a+\dots+s^{(b-1)a}}{b}$$

y ya está probado,pues se indicó que los resultados de convolución de generatrices son análogos a los de características. Puede verse R2,para más detalles sobre este tema.

Con vistas al ejemplo,tomemos $a = 2$, $b = 3$ y $a=3$, $b = 2$. Quedará; llamamos f a la característica de X con $r = 6$, llamamos g y h a las características de una de las descomposiciones y u y v a las de la otra.Puesta la notación en claro,

$$f(t) = g(t)h(t) = u(t)v(t) = \frac{1+e^{it}+\dots+e^{5it}}{6}$$

Es claro que g ,h ,u y v vendrán dadas por

$$g(t) = \frac{1+e^{2it}+e^{4it}}{3}$$

$$h(t) = \frac{1+e^{it}}{2}$$

$$u(t) = \frac{1 + e^{it} + e^{2it}}{3}$$

$$v(t) = \frac{1 + e^{3it}}{2}$$

El resultado 302 garantiza que h y v son características primas.Bastará ver que lo es u pues $g(t) = u(2t)$.

De 122 se deduce que si fuese

$$u(t) = u_1(t)\, u_2(t)$$

y fuesen m y n los números respectivos de discontinuidades de las distribuciones asociadas a u_1, u_2 ,debería tenerse

$$m + n - 1 \leqslant 3 \leqslant mn$$

así que ó se da

- m =1 y n =3 ó
- m =3 y n =1 ó
- m =2 y n =2

Si se da una de las dos primeras,ya está.En otro caso habría de ser

$$\frac{1 + e^{it} + e^{2it}}{3} = (p\exp(ita) + (1-p)\exp(itb)) \cdot$$

$$\cdot (q\exp(itc) + (1-q)\exp(itd))$$

donde $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, a,b,c y d son números reales.

La igualdad anterior implicaría:

$$pq = (1-p)(1-q) = p(1-q) + q(1-p) = \frac{1}{3} \qquad ó$$
$$pq + (1-p)(1-q) = p(1-q) = q(1-p) = \frac{1}{3}$$

incompatibles en $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, luego u es prima y la construcción del ejemplo ha concluido.

Concluimos,por tanto,que es posible expresar una característica de dos formas posibles en producto de factores primos ó indescomponibles.

* Segunda razón

En la aritmética de las características, en general, no vale la ley cancelativa. Esto es, si f , g y h son tres características y se verifica

$$fg = fh$$

no puede, de aquí, deducirse que sea $g = h$. Se acostumbra a llamar a este hecho fenómeno de Khinchine. Esta diferencia de índole algebraica es esencial. Lo ilustramos con un ejemplo.

La función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \\ 1 - |t| & \text{si} \quad |t| \leq 1 \end{cases}$$

es, según 127, una función característica.

Construimos una función périódica de período 2, repitiendo indefinidamente el " triángulo " $1 - |t|$, Llamemos a esa función g.

Según 128, g es también una función característica.

Es claro que se verifica

$$u(t) = f(t)g(t) = f(t)f(t),$$

y desde luego,

$$f(t) \neq g(t).$$

Así que el cociente de características no está unívocamente determinado ni siquiera cuando el propio cociente sea una característica. (En el ejemplo, u/f da indistantemente f ó g).

Para un importante subconjunto de funciones características, sí que es válida la ley cancelativa. Se trata de las infinitamente divisibles. Es sencillo de comprobar. Basta observar que la función G de 131 asociada al producto de dos infinitamente divisibles $f(t)$ y $g(t)$ viene dada por la suma de las funciones G asociadas a las características f y g. Entonces, se tendría

$$G(x) = G_f(x) + G_g(x)$$

y, desde luego, G y G_f determinan G_g.

Kawata (R21) dió condiciones suficientes para que si es

$$u(t) = f(t)g(t),$$

f esté unívocamente determinada por u y g. La condición requiere un clásico resultado de Ingham y Levinson que puede verse en R22.

3.2 Más ejemplos de distribuciones indescomponibles

El siguiente resultado es, en cierto modo, el contrapunto al ejercicio de Feller antes citado.

304 Lema de Raikov

Sea p un número primo. El polinomio

$$A(x) = \frac{1 - x^p}{1 - x}$$

no puede ser entonces expresado como producto de dos polinomios no constantes con todos sus coeficientes no negativos.

Demostración: R24.

De aquí, y de forma inmediata, se deduce:

305 Teorema. Sea X una variable aleatoria que con probabilidad $1/p$ toma cada uno de los valores $0,1,2,\ldots,p-1$; siendo p un número primo. Entonces, la distribución de X es indescomponible.

Hasta ahora las distribuciones primas que han aparecido han sido sólo discretas. Damos

306 Ejemplo de distribución indescomponible con soporte no acotado y absolutamente continua

Necesitaremos el siguiente y previo

307 Lema. Sea $n(x)$ la función de densidad de la distribución normal de media m y varianza v. Sea $g(x)$ una densidad de probabilidad cualquiera. Entonces

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x-y)g(y)\, dy$$

es una función de densidad y, además, $h(0)>0$.

Demostración:

Sea $G(t) = \int_{-\infty}^{t} g(y)\, dy$. Entonces: *salvo constantes*,

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(- \frac{(m+y)^2}{2v} \right) dG(y) > 0,$$

pues, si fuese cero, habría que concluir que la exponencial era cero, casi seguro Lebesgue. Que es una densidad se sigue, derivando, de 116.

Volvemos al ejemplo. Aplicando 137 a 109b, se obtiene que

$$g(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$$

es una función característica. Con la fórmula 111, puede verse que corresponde a una absolutamente continua con densidad dada por

$$\hat{g}(x) = x^2 \exp(-x^2/2)\ (2\pi)^{-1/2}$$

para todo x real.

Como $\hat{g}(0) = 0$, según 307, si para dos densidades g_1, g_2, fuese

$$\hat{g}(x) = g_1(x) * g_2(x),$$

seguro que ni g_1 ni g_2 serían normales.

Llamemos u y v a posibles características factores de g, de forma que

$$g(t) = u(t)v(t).$$

Multiplicar una exponencial por una potencia natural de la variable no afecta el orden de la función entera resultante, así que g es una función entera de orden dos. Adelantemos acontecimientos y usemos 318. Entonces, según ese resultado, tanto u como v serán enteras y de orden no mayor que dos. Deberá tenerse una de estas posibilidades:

a) $u(t) = \exp(a_1 t + a_2 t^2)$

b) $u(t) = (1+t)\exp(a_1 t + a_2 t^2)$

c) $u(t) = (1-t)\exp(a_1 t + a_2 t^2)$

d) $u(t) = (1-t^2)\exp(a_1 t + a_2 t^2)$

Entonces, d) es la descomposición trivial y no interesa; a), es la característica de una normal y nuestra densidad g no tiene componentes normales. Si c) fuese posible, debería ser (108b)

$$(1-t)\exp(a_1 t + a_2 t^2) = (1+t)\exp(\bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2),$$

esto es,

$$\frac{1-t}{1+t} = \exp(bt + ct^2), \text{con } b \text{ y } c \text{ complejos,}$$

y se tendría el absurdo de que una función racional coincide con una exponencial (piénsese que mientras esta última es entera, la primera sólo es analítica en $|t| < 1$). El caso b) se reduce a c).

En definitiva, $g(t)$ es prima q.e.d.

308 Ejemplo de distribución indescomponible con intervalo soporte acotado y absolutamente continua.

La construcción que sigue mejora un ejemplo dado por Paul Lévy.

Sean X_n variables aleatorias absol. continuas cuyas distribuciones de probabilidad poseen características $g_n(t)$, que son funciones enteras de orden unidad y tipo finito positivo, y que cumplen la condición de no tener ceros comunes. Supondremos además que el intervalo soporte de la distribución de X_n es

$$(-a_n, a_n)$$

con los a_n pertenecientes al intervalo $(0,1/2)$. El índice n recorre el conjunto $0,1,2,\ldots,N$, siendo $N+1$ un número primo.

Definimos las variables:

$$Y_n = 2n + X_n ,$$

cuyas características vendrán dadas por

$$h_n(t) = \exp(2nit)\ g_n(t)$$

y definimos asímismo la variable Z,como mixtura(134) de las variables Y_0, Y_1, etc,con las ponderaciones $1/(N+1)$,esto es

$$Z = \begin{pmatrix} 1/_{N+1} & 1/_{N+1} & 1/_{N+1} \ldots & 1/_{N+1} \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 \ \ldots & Y_N \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Probaremos que la distribución de Z es prima.

Si fuese $Z = X + Y$,siendo X e Y variables independientes,puede reemplazarse X por X-d e Y por Y + d,de forma que siempre podrá suponerse que X e Y toman el valor cero,y,que,en consecuencia,tanto los posibles valores que tome X como los que tome Y,estarán contenidos en los posibles de Z.

Escribamos

$$X = x + a(x)$$
$$Y = y + b(y)$$
$$Z = z + c(z),$$

en donde x,y,z,son respectivamente los números enteros más próximos a X,Y,Z ; y a,b,c, son las partes restantes.

Es claro que si $z = n$,la distribución de $c(z) = c(n)$ será aquella cuya característica sea $g_n(t)$.Esto se sigue inmediatamente de la definición de Z.Además,como X e Y son independientes,el par $(x,a(x))$ es independiente del $(y,b(y))$.

Por otra parte,como

$$z + c(z) = x + a(x) + y + b(y),$$

será

$$x + y - z = c(z) - a(x) - b(y) \qquad (2)$$

y como

$$|c(z) - a(x) - b(y)| \leq |c(z)| + |a(x)| + |b(y)| \leq \frac{3}{2}$$

y además, por construcción y por la observación anterior que relaciona los soportes de X,Y,Z, resulta que $x+y-z$ es par, así que necesariamente $x+y-z = 0$, o bien

$$x+y = z$$

luego de (2), se sigue

$$a(x)+b(y) = c(z). \qquad (3)$$

La variable z tiene, por lo tanto, a x e y (independientes) por componentes. Pero, como es inmediato verificar, la función característica de z viene dada por

$$\frac{1+e^{2it}+\ldots+e^{2iNt}}{N+1},$$

y, según 304, es indescomponible. Así que, ó x ó y es degenerada en 0. Supongamos que lo sea y. Entonces $Y = b(0)$.

De (3), para cada $z = 0,2,4,\ldots,2N$, se deduce

$$c(z) = a(z)+b(0) \qquad (4)$$

donde $a(z)$ y $b(0)$ son independientes.

Si llamamos $r(t)$ a la característica de $b(0)$, $s_n(t)$ a la de $a(n)$, se tiene según (4), 119 y según una observación anterior que

$$g_n(t) = r(t)\, s_n(t).$$

Se sigue de 318 y de 227 que tanto r como s_n son enteras y de orden unidad. Como las g_n no tienen, por hipótesis, ceros comunes, si fuese $r(w) = 0$, sería w un cero de cada g_n, así que $r(t) \neq 0$.

Por tanto, r es entera, de orden unidad y no nula, así que del resultado 210, se sigue

$$r(t) = \exp(\,at+b\,).$$

Teniendo en cuenta las condiciones necesarias para que una función sea característica,se deduce que

$$r(t) = e^{iqt} \text{ , con } q\text{,un número real.}$$

Luego b(0),o sea Y,es degenerada.Por lo tanto la distribución de Z es indescomponible como queríamos probar.

El ejemplo propuesto por Lévy consiste en tomar como g_n las uniformes en $(-t_n, t_n)$,donde cada t_n está en $(0,1/2)$ y además el cociente de dos números t_j y t_k distintos sea irracional.Esta última condición es la que lleva a suponer que no tienen ceros comunes.La idea de la construcción no es otra que trasladar cada variable una cantidad distinta de forma que pasen a tener recorridos que no se solapen.Esto último es lo que permite asegurar que la distribución de Z condicionada por n sea la misma que la de la variable Y_n.

3.3 Resultados fundamentales de la teoría.

Expondremos en este párrafo los teoremas básicos de esta teoría. El primero de ellos es el siguiente:

309 Teorema. Si una función característica no tiene factor primo alguno,es infinitamente divisible.

El recíproco no es cierto

Demostración: R15,para la demostración original.

Antes de seguir daremos un contraejemplo: esto es,construiremos una infinitamente divisible que tenga,al menos,un factor primo. Según 136,la función

$$\frac{p-1}{p-e^{it}}$$

es una característica infinitamente divisible. (p es mayor que la unidad).Es posible la factorización

$$\frac{p - 1}{p - e^{it}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p^{2^k} + e^{it2^k}}{p^{2^k} + 1}$$

y así todos los factores de esta descomposición son primos, según el resultado 302. En el apéndice 4 se comprueba que la anterior igualdad es cierta.

Demos otro ejemplo: Sean $p > q > 0$, tales que $p + q = 1$. La función

$$g(t) = p + q\exp(it)$$

es, 302, una característica prima. Escribimos, según el desarrollo del logaritmo, R18,

$$\log g(t) = \log (p(1 + \frac{q}{p} e^{it})) = \log p - \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{-qe^{it}}{p})^{j} \frac{1}{j} .$$

Se tiene además,

$$- \log p = - \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{-q}{p})^{j} \frac{1}{j} ,$$

así que puede escribirse

$$\log g(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\frac{-q}{p})^{k} (e^{itk} - 1)$$

Sea ahora

$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (\frac{q}{p})^{2n-1} (e^{it(2n-1)} - 1)$$

$$b(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (\frac{q}{p})^{2n} (e^{2nit} - 1)$$

Se tiene:

$$a(t) - b(t) = \log g(t)$$

y que según 130e y un paso al límite (*), las funciones $\exp(a(t))$ y $\exp(b(t))$ son infinitamente divisibles.

(*) No es más que el llamado teorema de De Finetti. Véase R4

Además,

$$\exp(a(t)) = g(t)\ \exp(b(t)),$$

luego la característica infinitamente divisible $\exp(a(t))$,tiene un factor irreducible,a saber,$g(t)$.

No debe creerse que hay que recurrir a ejemplos tan complicados. Un resultado de Cramér,que puede catalogarse de importante en el contexto de la teoría,da una amplia gama de infinitamente divisibles que admiten siempre,al factorizarlas,un factor primo al menos. Su demostración puede verse en R5

310 Teorema. Sea f una característica infinitamente divisible y sean M y N sus funciones asociadas en la representación canónica 133 (de Levy).Si existen constantes estrictamente positivas K y C tales que

$$N'(u) > K \text{ ,casi seguro Lebesgue en } (0,C),$$

entonces f tiene al menos un factor primo.

Como N es monótona,es c.s. diferenciable y por tanto,la condición que impone 310 tiene perfecto sentido.El corolario siguiente puede ser útil y da una amplísima variedad de distribuciones que siempre admiten un factor primo.

311 Corolario a 309.

Si una característica tiene algún cero real,tiene al menos un factor primo.

Demostración:

Si tiene algún cero real,no podrá,por 130a,ser infinitamente divisible,y basta entonces aplicar el contrarrecíproco del resultado fundamental 309.

Constatamos,por último,este otro resultado importante,que,al igual que 309,es debido a Khinchine (R15,ref. original).

312 Teorema. Toda función característica puede representarse como producto de a lo sumo dos características,que poseen la siguiente propiedad: una no posee factor primo alguno y la otra es un producto finito,ó un producto infinito con-

vergente de una sucesión de características indescomponibles.

Nota: Observemos que el resultado anterior viene a decir que toda característica es producto de una infinitamente divisible por otra formada por productos de factores primos.

Estos resultados ponen de manifiesto la relevancia que las infinitamente divisibles tienen en la teoría de la factorización, relevancia que ya fue apuntada en el párrafo 1.6 .

La literatura matemática usual sobre estos temas utiliza en las demostraciones de resultados como 309 y 312 ciertos lemas, que, como se apuntó en la introducción, han sido objeto de la atención del autor.

313 Lema. Sea (F_n) una sucesión de funciones de distribución de probabilidad y (f_n), la sucesión de las características asociadas. Si para un cierto nº $a>0$, se verifica

$$\lim_n N_a(f_n) = 0$$

entonces es, para todo nº $w>0$,

$$\lim_n Q_n(w) = 1 .$$

N_a y Q_n son, respectivamente, los funcionales de Khinchine y las funciones de concentración asociados.

Demostración:

Por hipótesis, para n suficientemente grande, es, para $0 \leq t \leq a$,

$$f_n(t) \neq 0$$

Como

$$0 \leq 1 - |f_n(t)|^2 = (1 + |f_n(t)|)(1 - |f_n(t)|) \leq 2(1 - |f_n(t)|)$$

se tendrá, a partir de las propiedades de la integral:

$$\int_0^a (1 - |f_n(t)|^2)\, dt \leq 2\int_0^a (1 - |f_n(t)|)\, dt$$

Y de 142d, se obtiene

$$\int_0^a (1 - |f_n(t)|^2) \, dt \leq 2 \int_0^a (1 - |f_n(t)|) \, dt \leq 2 N_a(f_n)$$

Y teniendo en cuenta 114,

$$\int_0^{2a} (1 - |f_n(t)|^2) \, dt = 2 \int_0^a (1 - |f_n(2t)|^2) \, dt \leq$$

$$\leq 8 \int_0^a (1 - |f_n(t)|^2) \, dt \leq 16 N_a(f_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \text{por hipótesis.}$$

Por consiguiente hemos probado que

$$\lim_n \int_0^{2a} (1 - |f_n(t)|^2) \, dt = 0$$

De la igualdad anterior se deduce que si n es suficientemente grande, es $f_n(t) \neq 0$ para $0 \leq t \leq 2a$. Puede repetirse, por lo tanto, el mismo argumento y concluir que cualquiera que sea $T > 0$, es

$$\lim_n \int_0^T (1 - |f_n(t)|^2) \, dt = 0 \qquad \text{(A)}$$

Llamemos $\tilde{F}_n(x) = 1 - F_n(-x-)$

y $F_n^s(x) = \tilde{F}_n(x) * F_n(x)$

Sea $H(x)$ una función de distribución de probabilidad simétrica, de forma que su función característica no se anule y sea absolutamente integrable. Sea $a(t)$ la característica de H. Si llamamos

$$G_n(x) = F_n^s(x) * H(x),$$

la característica de G_n será g_n, dada, según 117 y 118, por

$$g_n(t) = a(t)|f_n(t)|^2$$

y según la fórmula de inversión 110, se tiene:

$$G_n(x) - G_n(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} \; a(t)|f_n(t)|^2 dt \; .$$

No hay que preocuparse de los puntos de continuidad, pues, según 111 y 120, tanto H como $F_n^s * H$ son absolutamente continuas.

Cada G_n es simétrica por ser convolución de dos simétricas, así que:

$$G_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} \, a(t)\,|f_n(t)|^2 dt \;=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} \, a(t) \, dt \quad +$$

$$+ \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} \, a(t) \; (\; |f_n(t)|^2 - 1 \;) \; dt \; .$$

Si llamamos $J_n(x)$ a la expresión que figura en la línea anterior, y si se tiene en cuenta que

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} \, a(t)dt,$$

resultará ser

$$G_n(x) = J_n(x) + H(x) \qquad \text{(B)}$$

Como la expresión (sentx)/tx es una característica (109a), es claro que se verifica
$$\left| \frac{\text{sen } tx}{t} \right| \leq |x| .$$

Llamando

$$J_n(x,T) = \frac{1}{\pi}\int_0^{T} \frac{\text{sen } tx}{t} \, a(t) \; (\; |f_n(t)|^2 - 1 \;) \; dt$$

se tiene, según (A) que

$$|J_n(x,T)| \leq \frac{|x|}{\pi} \int_0^{T} (\, 1 - |f_n(t)|^2) \; dt \; \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ahora bien:

$$J_n(x) = J_n(x,T) + \frac{1}{\pi}\int_T^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} a(t) \left(|f_n(t)|^2 - 1 \right) dt ,$$

y para este último sumando se tiene la acotación que sigue:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_T^{\infty} \frac{\text{sen } tx}{t} a(t) \left(|f_n(t)|^2 - 1 \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|a(t)|}{T} \, dt = c/T,$$

siendo

$$c = (2/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)| dt .$$

Por lo tanto, para todo nº $T > 0$, se tiene:

$$|J_n(x)| \leq |J_n(x,T)| + \frac{c}{T}$$

Tomando límites en n, quedará, que, para todo número x,

$$\lim |J_n(x)| \leq \frac{c}{T} \text{ , para todo } T > 0.$$

Así que se tiene, que, para todo número x,

$$\lim | J_n(x) | = 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim J_n(x) = 0 \text{ , para todo } x.$$

Entonces, de (B)

$$\lim G_n(x) = H(x), \text{para todo } x \qquad \text{(C)}$$

ó según 124,

$$\lim g_n(t) = \lim a(t) |f_n(t)|^2 =$$

$$= a(t) \lim |f_n(t)|^2.$$

Como de (C), es

$$\lim g_n(t) = a(t) ,$$

y además a(t) es siempre no nulo, puede garantizarse que

$$\lim_n |f_n(t)|^2 = 1 \quad \text{para cualquier } t.$$

Usando otra vez 124, se tiene que la sucesión de funciones de distribución $F_n^s(x)$ converge completamente a la degenerada en el origen.

Ahora bien,

$$F_n^s(x+u) - F_n^s(x-) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

para valores $u>0$ cualesquiera y valores $x<0$, con $x+u>0$.

De aquí se deduce que

$$Q_n^s(u) = \sup_x \Pr(x \le X_n^s \le x+u)$$

debería tender a un número no menor que la unidad, y según 144a, será necesariamente para todo $u>0$

$$Q_n^s(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 .$$

Como

$$F_n^s = \tilde{F}_n * F_n ,$$

de 144d, se deduce que

$$Q_n^s(u) \le Q_n(u) \longrightarrow 1, \text{para todo } u>0, \text{ q. e. d.}$$

La demostración anterior contiene algunas variantes respecto a la original de Linnik. La demostración que da Lukacs del lema precedente sugiere el siguiente

314 Teorema. Sea F_n una sucesión de funciones de distribución de probabilidad con medianas únicas m_n de forma que $\lim m_n = 0$. Si las funciones características asociadas f_n verifican

$$\lim N_a(f_n) = 0$$

para algún nº $a>0$, entonces la sucesión de distribuciones dada converge completamente a la degenerada en el origen.

Demostración:

Usaremos la misma notación que en el lema anterior. Si w es un número positivo,

$$F_n^s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-y)\ d\widetilde{F}_n(y) \geq \int_{-\infty}^{w} F_n(x-y)\ d\widetilde{F}_n(y) \geq F_n(x-w)\ \widetilde{F}_n(w) =$$

$$= F_n(x-w)\ (\ 1 - F_n(-w-)\ )\ .$$

Comprobar la anterior cadena de desigualdades es inmediato.Por hipótesis,puede encontrarse un nº n_0 ,de forma que si $n > n_0$, se tenga $|m_n| < w$. Teniendo en cuenta la definición de mediana, véase esta en 138, resulta que si $n > n_0$, es

$$F_n(-w-) \leq \frac{1}{2}\ ,$$

y,por lo tanto,

$$F_n^s(x) \geq \frac{1}{2}\ F_n(x-w)\ .$$

En la demostración de 313 y con la única hipótesis,común con ésta, de que

$$N_a(f_n) \xrightarrow[n]{} 0$$

se probó que

$$F_n^s(x) \xrightarrow{c} d(0)$$

siendo d(0) la distribución degenerada en 0.Así que,si $x < 0$,

$$0 \leq \overline{\lim}\ \frac{1}{2}\ F_n(x-w) \leq \lim\ F_n^s\ (x) = 0\ ,$$

luego,si $x < 0$,se tiene que $\lim_n F_n(x) = 0$.

Análogamente:

$$1 - F_n^s(x) \geq \int_{-w}^{\infty} (\ 1 - F_n(x-y)\ )\ d\widetilde{F}_n(y) \geq \frac{1}{2}\ (\ 1 - F_n(\ x+w\ )\ )$$

Y si es $x > 0$,es entonces

$$\lim_n F_n(x) = 1 \quad \text{c.q.d.}$$

Precisamos introducir las siguientes

315 Definiciones.

Sea f una característica cualquiera que no tenga factores primos y sea D una descomposición cualquiera de f, esto es,

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \ldots f_k(t)$$

en donde cada f_j es una característica. Sea a mayor que cero, de forma que f no se anule en $-a \leq t \leq a$ (y por consiguiente tampoco se anulan ahí las f_j).

Se llama norma de la descomposición D á

$$v(D) = \mathrm{MAX} \ N_a(f_j)$$

tomándose el máximo en $1 \leq j \leq k$, y siendo N_a el funcional de Khinchine.

Llamaremos v-valor de f á

$$v = \mathrm{INF} \ v(D)$$

tomándose el ínfimo sobre todas las posibles descomposiciones de D.

316 Lema (fundamental)

Sea f una característica sin factores primos. Entonces el v-valor de f es nulo.

Demostración:

Nos hará falta el siguiente y previo

317 Lema. Sean G_n y H_n dos sucesiones de funciones de distribución de probabilidad de forma que para todo índice n, es

$$G_n * H_n = F$$

siendo F una distribución independiente de n y además supondremos que x=0 es mediana de cada H_k. Entonces, existe una subsucesión de G_n y otra de H_n tales que, llamando G_{n_k} y H_{n_k} a estas subsucesiones,

$$G_{n_k} \xrightarrow{c} G$$

$$H_{n_k} \xrightarrow{c} H,$$

y además $F = G * H$.

Demostración del resultado previo 317:
Según 123,G_n contiene una subsucesión que converge en los puntos de continuidad de una cierta distribución.Seguiremos llamando G_n a la subsucesión para ahorrar subíndices.Vamos a ver que converge completamente. Según 125,habrá que ver que para cada número $u > 0$ y valores grandes de $a > 0$ y de n,es

(desigualdad 2ª) $G_n(-a) < u$ (A)

(desigualdad 1ª) $G_n(a) > 1 - u$

Supongamos que la primera de estas desigualdades no se verificase.Sea $b > 0$.Propiedades elementales de la integral nos permiten afirmar:

$$1 - F(b) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(b-y)\ dH_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - G_n(b-y))\ dH_n(y) \geq$$

$$\geq \int_{-1}^{\infty} (\ 1 - G_n(b-y)\ )\ dH_n(y) \geq$$

$$\geq (\ 1 - G_n(b+1))\ (\ 1 - H_n(-1)\ )$$

Como $x = 0$ es mediana de cada distribución H_k,se tendrá que para todo nº $b > 0$

$$1 - F(b) \geq \frac{u}{2}$$

y entonces F no puede ser una distribución.
De igual forma se vería que la segunda de las desigualdades (A) tendría que satisfacerse.Así que existe una función de distribución G a la que la sucesión G_n converge completamente.

Análogamente de H_n se puede extraer una subsucesión, a la que seguiremos conservando el nombre, que convergerá en los puntos de continuidad de cierta distribución. Vamos a hacer exactamente lo de antes para probar que esa subsucesión converge completamente.
Sean a, b dos números positivos (estrictamente)

$$1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(a-y)\ dH_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - G_n(a-y))\ dH_n(y) \geq$$

$$\geq \int_{a+b}^{+\infty} (1 - G_n(a-y))\ dH_n(y) \geq$$

$$\geq (1 - G_n(-b))(1 - H_n(a+b)).$$

Tomando b lo suficientemente grande, puede siempre garantizarse que

$$\lim_n G_n(-b) = G(-b) < \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$1 - H_n(a+b) \leq 2(1 - F(a)) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

y por lo tanto

$$H_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{y n suficientemente grande.}$$

Igualmente se vería que para x tendiendo a menos infinito y n grande, el límite es cero. Llamando g_n y h_n a las características de G_n y H_n, se tiene

$$f(t) = h_n(t)\ g_n(t)$$

y si llamamos H a la función límite de la subsucesión H_n y dado que se ha probado que tanto G como H son distribuciones de probabilidad, tendrá sentido hablar de sus características g y h, y se tiene

$$f(t) = h(t)g(t)$$

y según 117,

$$F = H * G \text{ c.q.d.}$$

Demostración del resultado fundamental 316:
Llamemos v al v-valor de f. Por definición, habrá una sucesión

de descomposiciones D_n de forma que

$$\text{desc. } D_n \quad : \quad f(t) = f_{n,1}(t) \ \dots \ f_{n,k_n}(t)$$

$$v = \lim_n v(D_n)$$

$$v \leq v(D_n) < v + \frac{1}{n}$$

Llamemos f_1^n al factor de la descomposición D_n que maximiza el valor del funcional de Khinchine,esto es:

$$v(D_n) \ = \ N_a(f_1^n),$$

y llamemos f_2^n al producto de los restantes factores en esa descomposición.Será

$$v \leq N_a(f_1^n) < v + \frac{1}{n}$$

y

$$f(t) = f_1^n(t) \ f_2^n(t) \quad \text{,para cada n}$$

Del resultado previo 317,existen subsucesiones de f_1^n y de f_2^n ,llamémoslas

$$f_1^{n_k}$$

y

$$f_2^{n_k},$$

de manera que

$$\lim_k f_1^{n_k} \ = \ a(t)$$

$$\lim_k f_2^{n_k} \ = \ b(t)$$

sean características; verificándose además que

$$f(t) = a(t)\ b(t)$$

y

$$\lim_k N_a(f_1^{n_k}) = \lim_k \int_0^{a} \log \left| f_1^{n_k}(t) \right| dt = \int_0^{a} \log |a(t)|\ dt =$$

$$= N_a(a(t)) = v\ .$$

Supongamos que $v \geq \frac{1}{2} N_a(f)$ .Del resultado 142c,

$$N_a(b(t)) \lneq v$$

Ahora bien,por hipótesis, f no tiene factores primos,luego puede encontrarse mediante sendas descomposiciones de las características <u>a</u> y <u>b</u> ,otra descomposición D tal como

desc D : $\qquad f(t) = m(t)n(t)p(t)q(t)$

Desde luego es

$$v(D) < v$$

así que v no sería ínfimo.Por tanto,necesariamente debe ser

$$v < \frac{1}{2} N_a(f).$$

Esto implica que existe una descomposición $\widetilde{D}$ de f de forma que

$$v(\widetilde{D}) < \frac{1}{2} N_a(f)$$

Cada factor de $\widetilde{D}$ es una característica,que,por hipótesis,no posee factores primos.Aplicando el mismo argumento a cualquiera de esos factores,se obtiene:

$$v < \frac{1}{2} v(\widetilde{D}) < \frac{1}{4} N_a(f)$$

Itérese el procedimiento y se obtendrá que v= 0 q.e.d.

Notas: - Para poder aplicar en 316 el resultado 317,haría falta una condición sobre medianas nulas. No tiene importancia, pues esto siempre se puede conseguir mediante una traslación adecuada.

Y obsérvese ahora que una traslación equivale a multiplicar una función característica por $\exp(ita)$, siendo a una constante real, y que según el resultado 142e, no se alteran los valores del funcional de Khinchine.

-En la demostración que precede se ha supuesto que el v-valor v era un punto de acumulación. Probemos que no puede ser aislado. Si fuese $v > 0$ y aislado, existiría una descomposición D, tal como

$$f(t) = f_1(t) \dots f_n(t)$$

y sería por ejemplo,

$$N_a(f_1) = N_a(f_2) = \dots = N_a(f_s) = v \qquad \text{y}$$

$$N_a(f_{s+1}) = \dots = N_a(f_n) < v .$$

Como $f_1, \dots, f_s$ no son primas, es posible escribir $f_i = a_i b_i$, siendo a_i y b_i funciones características tales que $N_a(a_i) < v$ y $N_a(b_i) < v$. Así que habríamos encontrado otra descomposición, a saber,

$$f = a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots f_{s+1} \dots f_n$$

cuyo v-valor es menor que la de partida.

3.4 Factorización de características enteras y de características infinitamente divisibles

Un resultado fundamental que ya fue usado anteriormente para construir un ejemplo es el siguiente

318 Teorema. Sea $f(t)$ una característica entera tal que $f(t) = g(t)h(t)$, siendo g y h funciones características. Entonces: Tanto g como h son funciones enteras y además, si w es el orden de f, el orden de g y el orden de h no exceden de w.

Demostracion: R5

Seguimos con algunas cuestiones previas sobre las infinitamente divisibles.

319 Teorema. Una función característica entera e infinitamente divisible no tiene ceros (ni reales ni complejos)

Demostración:

Sea f infinitamente divisible.Entonces $f^{1/n}$ es,según 130d, una característica para cada n natural.Como $f^{1/n}$ es un factor de f,según 318,será una función entera.

Si fuese $f(w) = 0$ para algún complejo w, $f^{1/n}$ tendría una singularidad en w,en contradicción con que es entera.

320 Teorema. La función característica de una distribución con intervalo soporte acotado,y que no se reduce éste a un punto, no puede ser infinitamente divisible.

Demostración:

Si tiene soporte acotado,es,según 228,entera y con infinitos ceros.No puede ser,pues,de acuerdo con 319,infinitamente divisible.

Nota sobre este último resultado: El teorema 320 puede catalogarse de elemental con otra metodología para su demostración.

En efecto; Sea X una variable aleatoria no degenerada y tal que,para alguna constante a positiva,

$$|X| < a$$

Si suponemos que X posee distribución infinitamente divisible habrá que admitir que,para cada n natural,existen n variables independientes e idénticamente distribuidas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de manera que:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Como cada

$$|X_j| < \frac{a}{n},$$

será

$$VAR\ (X_j) < \frac{a^2}{n^2}$$

y por lo tanto,

$$VAR\ (X) < \frac{a^2}{n}\ ,\text{para cada } n$$

así que ó VAR(X) = 0,y por tanto X es degenerada,que no lo es, ó X no es infinitamente divisible.

El resultado fundamental 309 proporciona el siguiente:

321 Teorema. La función característica f de una distribución cuyo intervalo soporte es acotado puede siempre escribirse como producto de un número finito ó numerable de características indescomponibles.

Demostración:

Hay que añadir que el intervalo soporte no se reduzca a un punto,en cuyo caso es trivial. Según 319, f no es infinitamente divisible.Así que,de 309,f tiene al menos un factor primo $f^{(1)}$.Llamemos f_2 al producto de los restantes factores.Será,según 318,una función entera de orden unidad y no va a ser entonces infinitamente divisible.Entonces, f_2 tiene al menos un factor primo $f^{(2)}$; Itérese el procedimiento.

Ilustramos el teorema:

322 Ejemplo. La distribución uniforme en (-1,1),cuya función característica es,según 109a,

$$\frac{\text{sen } t}{t}$$

puede escribirse como

$$\prod_{K=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^k}$$

Cada uno de esos factores es una característica con sólo dos puntos de discontinuidad y,3-02, no factorizable.La uniforme sólo admite ésta o parecidas factorizaciones.No puede factorizarse,como ha probado Lewis en R23,como producto de dos absolutamente continuas.

Un problema clásico en la teoría de la factorización ha sido el de determinar la llamada clase I_0 ,esto es, la clase de las distribuciones infinitamente divisibles que sólo pueden descomponerse en factores infinitamente divisibles.

La caracterización de esta clase aún no ha sido del todo lograda y parece un problema complicado.Lo que sigue no usa este tipo de resultados.Una exposición detalladísima puede verse en R5.

El problema de la clase I_0 tiene sus antecedentes.Es probable que el más antiguo resultado en esa dirección sea el conocido

323 Teorema (Cramér,1936)

La función característica de la ley normal $N(m,\sigma)$

$$f(t) = \exp (imt - \sigma^2t^2/2)$$

tiene sólo componentes normales.Además si es

$$f(t) = g(t)\ h(t)$$

con,necesariamente de la forma,

$$g(t) = \exp (iat - p^2t^2/2)$$

$$h(t) = \exp (ibt - n^2t^2/2),$$

es

$$m = a+b \quad \text{y}$$

$$\sigma^2 = p^2 + n^2 .$$

Este resultado,que fue conjeturado por Lévy un año antes,es una consecuencia del teorema de factorización de Hadamard.Pueden verse demostraciones en R4,R5,R9;R7 etc

La misma idea tuvo Raikov al probar:

324 Teorema(Raikov, 1937)

La función característica de la distribución de Poisson

$$f(t) = \exp (a(\exp(it)-1)) \quad ,a>0$$

sólo tiene factores de Poisson.Además si es

$$f(t) = g(t)\ h(t)$$

con,necesariamente de la forma,

$$g(t) = \exp(\ b(\exp(it)-1)\ ) \qquad ,b > 0$$

$$h(t) = \exp(\ c(\exp(it)-1)\ ) \qquad ,c > 0$$

es

$$a = b + c.$$

Remitimos a las mismas referencias que en 323 para su demostración.Desde luego,este último resultado no es consecuencia inmediata del teorema de Hadamard,porque la característica de la distribución de Poisson es una función entera de orden infinito! ; deberán utilizarse generatrices.

CAPITULO IV : SOBRE LA FACTORIZACION DE LAS LEYES GAMMA Y POISSON.

Este último capítulo expone algunas consideraciones del autor sobre las posibles descomposiciones de las leyes gamma y Poisson.

4.1 Sobre la factorización de la gamma.

En este párrafo llamaremos $G(a,p)$ a la distribución gamma de parámetros a y p ,cuya función de densidad es,para x no negativo,

$$f(x;a,p) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}$$

y 0 en la parte negativa,siendo $a>0, p>0$, y Γ la función de Euler,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

La característica es,109c,

$$\left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

401 Teorema. Sea $F(x)$ una función de distribución de probabilidad con función característica entera $f(t)$.
Sean n y m enteros positivos.Es imposible,entonces,la igualdad siguiente:

$$G(a,n) = F * G(a,m)$$

Demostración:
Supongamos que $n > m$. Se debería tener:

$$\left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-n} = f(t)\left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-m} \qquad (A)$$

El miembro de la izquierda presenta un polo de orden n y el de la derecha un polo de,a lo sumo,orden $m < n$,luego ambas expresiones nunca coincidirían.

Supongamos ahora que es $n < m$. La función de la derecha de(A) presenta un polo de orden m en $t = -ia$.Y la de la izquierda,sólo de orden n.Como es $m > n$,podría ser que f se anulase en $t = -ia$ (tuviese,con precisión,un cero de multiplicidad adecuada, esto es, m-n) y la igualdad (A) podría darse.
Pero siendo f entera,no puede nunca anularse sobre el eje imaginario en virtud de la "ridge property" (226) .El teorema queda demostrado.
Por supuesto que 401 sería cierto en el caso trivialísimo de ser $m = n$ y $f(t) = 1$,para todo t.

402 Teorema. Sean X e Y variables independientes de manera que:

a) Y se distribuye según una G(a,p)

b) X tiene intervalo soporte acotado que no se reduce a un punto.

Entonces,X + Y nunca puede distribuirse como G(b,q),para números b y q cualesquiera.

Demostración:

Supongamos que sí fuera posible; entonces se debería dar la igualdad siguiente: llamando f a la función característica de la distribución de X,

$$f(t) \left(1 - \frac{it}{a} \right)^{-p} = \left(1 - \frac{it}{b} \right)^{-q}$$

Según 228,el miembro de la izquierda se anula infinitas veces y el de la derecha nunca.Así que es imposible la anterior igualdad.

En definitiva,lo que se ha probado es que la convolución de una gamma y de una distribución cuyo intervalo soporte sea $[0,a]$ con a finito y positivo,nunca dará una gamma.Es claro que ese intervalo soporte no podría cubrir,de cualquier forma, números negativos,y que igualmente los puntos del "principio del intervalo" deben pertenecer al soporte de la distribución.

Las condiciones recién comentadas son absolutamente necesarias para que el planteamiento tenga algún sentido.
Según esto,por ejemplo,una uniforme ó una beta etc no pueden dar una gamma mediante convolución con otra gamma.

Nos planteamos ahora el problema siguiente: ¿ Cuándo la convolución de una gamma con una infinitamente divisible volverá a dar una gamma?

El resultado que sigue proporciona una respuesta parcial.
403 Teorema. Sean $p > q > 0$ y $a > 0$. Si es

$$G(a,p) = G(a,q) * F, \qquad (A)$$

para una cierta distribución de probabilidad infinitamente divisible,necesariamente F es una gamma de parámetros a y $p-q$.

Demostración:

Desde luego,si (A) ha de ser cierto,puede garantizarse que F tiene segundo momento,pues si la suma de dos variables independientes tiene varianza y la tiene uno de los sumandos,la tiene el otro.Si llamamos K,K_p y K_q a las funciones de la representación de Kolmogorov 132,según una observación hecha en la página 39,ha de ser:

$$K(x) + K_q(x) = K_p(x)$$

Como (apéndice 2) K_p y K_q son integrales de funciones no negativas,son funciones absolutamente continuas y por lo tanto

$$K(x) = K_p(x) - K_q(x)$$

es también una función absolutamente continua,y,si llamamos con letras minúsculas a las correspondientes derivadas casi seguro Lebesgue,nos será lícito escribir

$$k(x) + k_q(x) = k_p(x)$$

Teniendo en cuenta las representaciones dadas en el apéndice nº 2, será

$$k(x) + qxe^{-ax} = px\, e^{-ax}$$

siempre que x sea positivo.

La unicidad de la representación 132 nos dice que debe ser

$$K(x) = \int_0^x k(x)\, dx$$

y que corresponde a una distribución $G(a,p-q)$.

La demostración ha concluído.

Así que, si la convolución de dos gammas con el mismo parámetro $\underline{a}$ es otra gamma (reproductividad), la "diferencia" de de dos gammas del mismo parámetro $\underline{a}$, es otra gamma, si se supone adicionalmente que la distribución resultante ha de ser infinitamente divisible.

La anterior demostración sugiere:

405 Teorema. Sean a, b, p números positivos. Una condición suficiente para que sea

$$G(a,p) = G(b,p) * F$$

siendo F una ley infinitamente divisible, es que $a < b$.

Demostración:

Definimos la función

$$k(x) = \begin{cases} 0, \text{si es } x < 0 \\ px\,(e^{-ax} - e^{-bx}) \quad , \text{si es } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Probaremos que es una función no negativa.

Como x es positivo, la exponencial es monótona y $a < b$, es

$$\exp(-ax) > \exp(-bx)$$

Por tanto, $k(x)$ es no negativa.

Además,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} px\ (e^{-ax} - e^{-bx})\ dx$$

$$= 2p \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \right) < \infty$$

Entonces la función

$$K(x) = \int_{-\infty}^{x} k(x)\ dx$$

verifica las condiciones del tipo de Kolmogorov(132).
Si llamamos K_a y K_b a las funciones de Kolmogorov de las distribuciones $G(a,p)$ y $G(b,p)$, entonces basta observar que

$$K(x) = K_a(x) - K_b(x)$$

y que por lo tanto

$$G(a,p) = G(b,p) * F \quad \text{c.q.d.}$$

Nota: Lo que viene a decir 405 es que la distribución gamma está en la llamada clase L. Aquí no se ha usado la clásica condición de pertenencia a esta clase que viene dada por el hecho de que las funciones M y N de la representación de Lévy(133) sean derivables a izquierda y derecha en todos los puntos y que $u\,M'(u)$, para $u<0$, y $u\,N'(u)$, para $u>0$ sean funciones no crecientes. Un detallado estudio de este notable subconjunto de las leyes infinitamente divisibles-la clase L- puede verse en R8 ó en R6.

Por último vamos a ver que los resultados 323 y 324 no tienen paralelo para la ley gamma

406 Ejemplo. Supongamos que la $G(1,p)$ sea expresable como convolución de dos leyes infinitamente divisibles

R y S. Busquemos dos leyes R y S que no sean gammas.

* La función

$$r(x) = \begin{cases} 0, \text{si } x < 0 \\ x, \text{si } 0 \leq x < 1 \\ e^{-(x-1)}, \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es no negativa e integrable Lebesgue en la recta. La comprobación es inmediata.

** La función

$$s(x) = \begin{cases} 0, \text{si } x < 0 \\ x\,(\,p\,e^{-x} - 1\,), \text{si } 0 \leq x < 1 \\ px\,e^{-x} - e^{-(x-1)}, \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es no negativa e integrable Lebesgue en la recta.
En efecto, si $0 \leq x < 1$

$$px\,e^{-x} - x = x(\,p\,e^{-x} - 1\,)$$

expresión que es no negativa si suponemos, por ejemplo, que $p > e$, <u>hipótesis que incorporamos al ejemplo</u>.
Si $1 \leq x$,

$$px\,e^{-x} - e^{-(x-1)} = e^{-x}\,(px-e) \geq 0$$

Así que es una función no negativa. Se ve fácilmente que es integrable.
Llamemos K, K_1 y K_2 a las funciones de Kolmogorov de $G(1,p)$, R y S respectivamente (puede suponerse sin pérdida de generalidad que R y S tienen varianza). Será

$$K(x) = K_1(x) + K_2(x) \qquad \text{(A)}$$

Ahora bien, las funciones

$$\int_{-\infty}^{x} r(s)\,ds \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{x} s(t)\,dt$$

verifican que sumadas dan precisamente $K(x)$, luego nos pueden servir como las K_i, $i=1,2$ de la igualdad anterior (A). Desde luego ninguna de las K_i corresponde a una gamma, en virtud de la unicidad de la representación. Así que se han construído dos infinitamente divisibles, ninguna de ellas gamma, que al convolucionarlas dan una gamma. El ejemplo ha terminado.

Realmente no tiene qué extrañar que 323 y 324 no tengan paralelo. El fondo del problema, dentro de la clase de las infinitamente divisibles, parece que está en resolver una ecuación de la forma

$$H = H_1 + H_2 \qquad \text{(B)}$$

siendo las H funciones del tipo de Levy-Khinchine, y estando dada ya la función H. Si H presenta un sólo salto (casos normal y Poisson, véase apéndice nº 2), es posible escribir H_1 y H_2 "similares" a H de forma que (B) sea cierto. Cuando H es continua el problema es radicalmente distinto.

4.2 Sobre la factorización de la distribución de Poisson.

En este párrafo, y por razones que en su momento fueron expuestas, trabajaremos con la función generatriz de probabilidad (véase 107).

407 Teorema. Caracterización de la generatriz de Poisson

Sea $P(z)$ una función generatriz de probabilidad. Si P es una función entera, de orden unidad y nunca nula, entonces necesariamente es

$$P(z) = e^{m(z-1)}, \text{siendo } m > 0.$$

Demostración:

Según 210,

$$P(z) = e^{Q(z)}$$

donde Q es un polinomio de grado 1, a lo sumo.

Observemos que si el grado de Q fuese cero, Q sería una constante y P también, evidentemente. Entonces P no sería de orden 1.

Según la observación podemos directamente escribir

$$P(z) = e^{az+b}$$

con, en principio, a y b, números complejos:

$$a = a_1 + ia_2$$

$$b = b_1 + ib_2$$

donde los números a_j y b_j, $j = 1,2$ son reales. Si z es real,

$$P(z) = \exp(\ Q(z)\ ) = \exp\ (\ az + b\ ) =$$

$$= \exp(\ a_1 z + b_1\ )\cos\ (\ a_2 z + b_2) \ +$$

$$+\ i\ \exp(\ a_1 z + b_1\ )\ \mathrm{sen}\ (\ a_2 z + b_2\ )$$

que es un nº real(107), así que necesariamente

$$\exp(\ a_1 z + b_1\ )\ \mathrm{sen}\ (\ a_2 z + b_2\ ) = 0 \text{ para todo } z \text{ real,}$$

y esto obliga a que sea

$$\mathrm{sen}\ (\ a_2\ z + b_2) = 0$$

lo que implica que

$$a_2 = b_2 = 0$$

Además, como $P(1) = 1$, será

$$e^{a_1 + b_1} = 1, \text{lo que implica que}$$

$$a_1 + b_1 = 0$$

Por otra parte, como si $0 < z < 1$, es $P(z) < 1$, se tiene que

$$e^{a_1 z + b_1} < 1, \text{siempre que } 0 < z < 1.$$

O sea,que

$$\exp\ (\ a_1(z-1)\ ) < 1\ , \text{siempre que } 0 < z < 1,$$

lo que necesariamente obliga a que sea

$$a_1 > 0$$

Llamemos $a_1 = m > 0$.

Quedará

$$P(z) = \exp(m(z-1))$$

que,como un sencillo cálculo prueba,es la función generatriz de probabilidad de la distribución de Poisson.(Bastaría desarrollar en serie de potencias de z)

408 Corolario. Sea P(z) una generatriz de probabilidad entera, de orden uno y nunca nula.Si Q(z) y R(z) son otras dos generatrices tales que

$$P(z) = Q(z)\ R(z),$$

tanto Q como R corresponden a generatrices de Poisson.

Demostración.

Según 407,P es de Poisson y la cuestión se reduce a 324.

Nota: Obsérvese que en el corolario anterior no pueden utilizarse argumentos que serían cosa común en las características,porque,en definitiva,el orden de una característica entera es al menos la unidad (227),pero el de una generatriz entera puede ser cero (por ejemplo, una función generatriz que sea un polinomio,como

$$\frac{1+s}{2}\ )$$

Estudiamos,por último las posibles formas de una generatriz de probabilidad,entera,nunca nula y de orden 2.

Supongamos que P sea generatriz de probabilidad entera, nunca nula($), y de orden 2. Será, según 210,

$$P(z) = e^{Q(z)}$$

donde Q es un polinomio de grado dos, a lo sumo. Con las hipótesis hechas, debe ser P de grado 2. Con un argumento parecido al del resultado 407, es fácil ver que los coeficientes del polinomio Q deben ser reales. Así que, podemos escribir:

$$Q(z) = az^2 + bz + c$$

y a, b, c, son reales.

Como es $P(1) = 1$, tiene que ser

$$a + b + c = 0 \qquad (1)$$

Por otra parte, si $0 < z \leq 1$, es $0 < P(z) \leq 1$; así que

$$0 < P(0) = e^{Q(0)} = e^{c} \leq 1,$$

pero si $P(0) = 1$, sería evidentemente $P(z) \equiv 1$, y no sería P de orden dos. Así que necesariamente debe ser $\underline{c}$ un nº negativo. Por lo tanto, de (1)

$$a + b = -c > 0$$

Si P tiene la forma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

podemos calcular su derivada y será:

$$P'(z) = (2az + b)\exp(az^2 + bz + c)$$

y también

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k z^{k-1}.$$

Haciendo $z = 0$ en ambas expresiones, quedaría:

$$P'(0) = p_1 \geq 0$$

($) Nunca nula, aquí y en otras ocasiones, significa no nula para todo complejo.

y por otra parte,

$$P'(0) = b\,e^{c} = b\,P(0)\ .$$

Ahora bien:

- Si $P'(0)$ fuese cero, debería ser $b = 0$ y eso implicaría que

$$P(z) = \exp\,(\,az^2 - a\,)\ ,\text{con } a > 0$$

función generatriz que correspondería a una distribución concentrada en los puntos $0,2,4,\ldots 2k,\ldots$ con probabilidades $p_0\ ,p_2\ ,\ \ldots$ dadas por

$$p_{2k} = e^{-a}\ \frac{a^k}{k!}$$

- Si $P'(0)$ fuese estrictamente positivo, como $P(0)$ es positivo de una observación anterior, debería ser $b > 0$. Teniendo en cuenta 140, debe ser

$$P'(z) = (2az + b)P(z) \geqslant 0$$

para cualquier $z \geqslant 0$. Como para $z > 0$, es $P(z) > 0$, la única forma de que eso se verifique es que $a > 0$. Entonces

$$P(z) = \exp(\,az^2 + bz + c\,) = \exp(\,az^2 + bz - a - b\,) =$$

$$= \exp(a(z^2 - 1))\ \exp(b(z-1)),$$

que sería la generatriz correspondiente a la suma de dos variables independientes, una con distribución como la del caso anterior, y otra con distribución de Poisson de parámetro b.

Resumiendo, hemos probado

409 Teorema. Si P es una generatriz de probabilidad, entera, nunca nula y de orden 2, entonces se tiene una de estas posibilidades:

- P es generatriz de la variable aleatoria 2X, distribuyéndose X según Poisson

- P es producto de una generatriz como en el caso anterior por una de Poisson "corriente" .

No hay otras posibilidades.

Nota: La función generatriz no tiene buenas propiedades en el tratamiento de estos problemas.

Por ejemplo, si la variable X se distribuye según una ley de Poisson, su función generatriz es emtera. Piénsese que la generatriz de la variable X/3 no es una función entera. Y en general, qX ,con q no entero negativo, no posee una generatriz entera.

Esto, naturalmente, no es más que consecuencia de la definición de generatriz, y es lo que hace, junto con inconvenientes de otro tipo ya apuntados, que no se use casi nada como herramienta en la teoría de la factorización.

A P E N D I C E S

APENDICE 1

Caracterizaremos aquí la transformación que a cada distribución de probabilidad hace corresponder su función característica. Necesitaremos el siguiente:

Lema. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que a (x_1, x_2) hace corresponder $f(x_1, x_2)$ y que es acotada y medible en x_2.

Si para cualquier nº real x_2 y cualesquiera funciones de distribución de probabilidad H_1 y H_2, se verifica:

$$\iint f(x_1, x_2 + y_2)\, dH_1(x_2)\, dH_2(y_2) =$$

$$= \iint f(x_1, x_2)\, f(x_1, y_2)\, dH_1(x_2)\, dH_2(y_2),$$

necesariamente, debe ser

$$f(x_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2)\, f(x_1, y_2).$$

Demostración:

Llamemos $d(x-a)$ a la distribución de probabilidad degenerada en $\underline{a}$. Tomemos $H_1(x) = d(x-b)$ y

$$H_2(x) = \frac{1}{2}\left(d(x) + d(x-a) \right),$$

siendo a y b números reales. Reemplazando en la condición del enunciado y efectuando las integrales, resulta

$$f(x_1, b)\left(f(x_1, 0) + f(x_1, a) \right) =$$

$= f(x_1, b) + f(x_1, b + a)$, para cualesquiera $\underline{a}$ y $\underline{b}$ reales

En particular, para $a = 0$, quedaría:

$$2\, f(x_1, 0)\, f(x_1, b) = 2\, f(x_1, b)$$

y por lo tanto,

$$f(x_1,b)\ (\ f(x_1,0) + f(x_1,a)\ )\ = f(x_1,0)f(x_1,b) + f(x_1,b+a).$$

Esto es:

$$f(x_1,b+a)\ =\ f(x_1,b)\ f(x_1,a) \quad \text{c. q. d.}$$

Teorema. Supongamos que $K(s,x)$ es una función que cumple las condiciones que siguen:

1ª K es una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$ (complejos), acotada y medible en x.

2ª Si G_1 y G_2 son dos distribuciones de probabilidad,

$$G_1 \equiv G_2 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} K(s,x)\ dG_1(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(s,x)\ dG_2(x)$$

3ª Si es $G = G_1 * G_2$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,x)\ dG(x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,x)\ dG_1(x) \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(s,x)\ dG_2(x) \right)$$

Entonces es necesariamente

$$K(s,x) = \exp\ (\ ixA(s)\ ),$$

donde A es una función real y tal que $\{\ |A(s)|\ , s \text{ es real}\}$, es un conjunto denso en $[0,\infty)$. El recíproco es cierto.

Demostración:

Por la condición 1ª, toda distribución de probabilidad tiene una función transformada; la integral de K respecto a la distribución definiría la transformación. Si G_1 y G_2 son tales que $G_1 * G_2 = G$, y si g es la transformada de G, se tiene:

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s,x)\ dG(x) = \int\int K(s,t)K(s,u)\ dG_1(t)\ dG_2(u)$$

y por otra parte

$$g(s) = \int\int K(s,t+u)\ dG_1(t)\ dG_2(u)$$

Por tanto, del lema anterior, se sigue:

$$K(s,t)\ K(s,u) = K(s,t+u)$$

Es bien conocido que las soluciones medibles de esta ecuación son de la forma

$$K(s,x) = \exp(\ xr(s)\ ).$$

Si $r(s) = a(s) + ib(s)$, como K está acotada en x, debe ser

$$a(s) \equiv 0$$

y entonces

$$K(s,x) = \exp(\ ixb(s)\ )$$

Así que
$$g(s) = \int \exp(\ ixb(s)\ )\ dG(x)$$

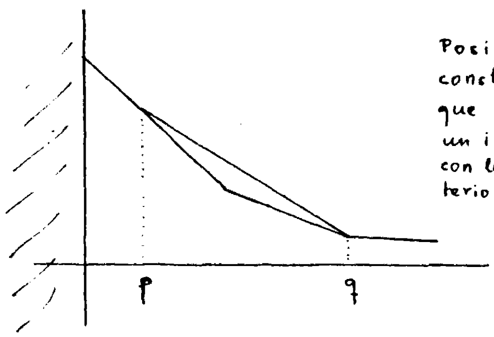
y como la característica de G, llamémosla h(t), viene dada por

$$h(t) = \int \exp(itx)\ dG(x)$$

resultará que

$$h(\ b(s)\ ) = g(s).$$

Veamos lo de la densidad. Si $|b(s)|$ no fuese denso en $[0, \infty)$, existiría un intervalo (p,q) contenido en la semirrecta positiva, de forma que $b(s)$ no tomaría valores dentro de ese intervalo. Construimos dos características del tipo de Pólya que se diferencien en $(p,q) \cup (-q,-p)$. (ver figura). Las transformadas van acumplir, si son f_1 y f_2 estas características,



Posibilidad de construir dos f.c. que difieran en un intervalo finito con la ayuda del criterio de Pólya (127)

$$g_1(s) = f_1(b(s))$$

$$g_1(s) = f_2(b(s))$$

Como $|b(s)| \notin (p,q)$, será

$$g_1 \equiv g_2$$

idénticamente,en contra de la segunda condición,luego debe ser denso.

Para ver el recíproco,aproximamos K por un polinomio trigonométrico,según el teorema de aproximación de Weierstrass;luego usamos que,si para toda función continua y acotada h,es

$$\int h dG_1 = \int h dG_2$$

es que necesariamente coinciden las funciones G_1 y G_2 , y esto probaría la unicidad.La propiedad de convolución se demuestra simplemente efectuando los cálculos de la manera usual.

APENDICE 2

REPRESENTACIONES CANÓNICAS

	Lévy-Khinchine	Kolmogorov	Lévy
NORMAL $N(\mu,\sigma^2)$	$G(x) = \sigma^2 \varepsilon(x)$ $a = \mu$	$K(x) = \sigma^2 \varepsilon(x)$ $\alpha = \mu$	$\hat{a} = \mu$ $\quad \hat{\sigma} = \sigma$ $M = N \equiv 0$
POISSON $P[\lambda]$	$G(x) = \frac{\lambda}{2} \varepsilon(x-1)$ $a = \frac{\lambda}{2}$	$K(x) = \lambda\, \varepsilon(x-1)$ $\alpha = \lambda$	$\hat{a} = \frac{\lambda}{2}$ $\quad \hat{\sigma} = 0$ $M(u) = 0$ $N(u) = \lambda\, \varepsilon(u-1)$
GAMMA (a, p)	$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{p y e^{-ay} dy}{1+y^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ $a = \int_0^\infty \frac{p e^{-ay} dy}{1+y^2}$	$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ p\int_0^x y e^{-ay} dy, & x \geq 0 \end{cases}$	$\hat{a} = p \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2} dy$ $\hat{\sigma} = 0$ $M(u) = 0$ $N(u) = -p \int_u^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx$

A P E N D I C E 3

Téngase en cuenta que

$$\frac{1}{24}\int_0^{\infty}\exp(-x^{1/4})\,dx = \frac{1}{24}\cdot 4\cdot\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{4-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{6}\,\Gamma(4) = 1.$$

Si consideramos

$$\frac{dF(b)}{db} = \left(\frac{1}{24}\int_0^{\infty} e^{-x^{1/4}}\,(1-b\,\text{sen}\,x^{1/4})\,dx\right)' =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\infty} e^{-x^{1/4}}\,\text{sen}\,x^{1/4}\,dx =$$

$$= (1/6)\int_0^{\infty} t^3\,e^{-t}\,\text{sen}t\,dt$$

esto último es la parte imaginaria de la f.c. de la gamma(1,4), salvo constantes multiplicativas,evaluada en el punto $t = 1$. Por tanto,$F(b)$ = constante,y como para $b = 0$,es $F(0) = 1$,será entonces idénticamente la unidad.Así que para todo b de $[0,1]$ $f(x,b)$ era una densidad.(Es trivial que es no negativa). Para comprobar lo de los momentos,puede usarse el mismo procedimiento.

A P E N D I C E 4

Esa notable factorización no es más que consecuencia de una igualdad elemental.

En efecto,

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2^n} =$$

$$= (1 + z)(1 + z^2) (1 + z^4) (1 + z^8) \dots (1 + z^{2^n}).$$

Basta tomar límites, y quedaría que para $|z| < 1$, el límite del producto anterior es

$$\frac{1}{1 - z}$$

Entonces, transformando así la expresión

$$\frac{p - 1}{p - e^{it}} = (1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{e^{it}}{p})^{-1} .$$

se obtiene el resultado deseado.

R E F E R E N C I A S   B I B L I O G R A F I C A S

1 Loève,M ."Probability Theory",vol. I,4ª edic. Springer-Verlag, 1977

2 Feller,W ."An introduction to Probability Theory and its applications",vol I ,3ª edic. Wiley,1968.

3 Feller, W."An Introduction to Probability Theory and its applications",vol II,2ª edic.,Wiley,1971.

4 Lukacs,E "Characteristic Functions",2ª edic.Griffin,1970.

5 Linnik,Y.V. "Décompositions des lois de probabilités" Gauthier-Villars,1962.

6 Gnedenko & Kolmogorov "Limit distributions for sums of independent random variables",edic.revisada,Addison,1968.

7 Dugué,D "Arithmétique des lois de probabilités",Memorial des Sciences Math.,Gauthier-Villars,1957.

8 Lévy,P. "Theorie de l'addition des variables aléatoires", 2ª edic.,Gauthier-Villars,1954.

9 Burrill,C.W. "Measure,Integration & Probability", Mc. Graw Hill,1972.

10 Cramér,H. " Mathematical Methods of Statistics", Princeton Mathematical Series,1946.

11 Ash,R.B. "Real Analysis and Probability",Academic Press, 1972.

12 Pólya,G. "Remarks on characteristic functions", First Berkeley Simposium,1949.

13 Dugué & Girault "Fonctions convexes de Pólya",Publ. Inst.Stat. Univ. París.,1955.

14 Gihman & Skorohod " The theory of Stochastic Processes,vol II Springer,1976

15 Khinchine,A,J, " Sur l'arithmétique des lois de distribution",Bull. Univ. Moscú,1937

16 Titchmarsh,E.C. "The theory of functions", 2ª edición Oxford University Press,1939

17 Boas,R.P.(jr) "Entire Functions",Academic Press,1954

18 Hardy,G.H. "A course of pure mathematics" ,10ªedic, Cambridge University Press,1950.

19 Doetsch, "Introd. to the theory and applications of Laplace Transforms",Springer,1974.

20 Ramachandran,B "Advanced theory of characteristic functions" Statis. Publ. Society of Calcuta,1967.

21 Kawata,T "On tha division of prob. laws ",Proc. Imp. Acad. Tokyo,1940.

22 Kawata,T. "Fourier Analysis in Probability Theory" Academic Press,1972

23 Lewis,T "On the factorisation of uniform distribution" J. Applied Probability,1967

24 Raikov,D.A. "Sur une propieté des polynômes de division d'un cercle,Mat. Sbornik. 1937.

= =